Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 8 - Corrigé

Exercice 1.

1. Soient $G, H \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire standard tels que $k = \dim(G) > \dim(H)$. Montrer que G possède une base orthonormale $w_1, \ldots, w_k$ telle que $w_k \perp H$.

2. Pour deux matrices $A, B \in K^{n\times n}$, montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Solution.

1. *Soient $\ell = \dim(H)$, $B_G \in \mathbb{R}^{n\times k}$ telle que les colonnes de B_G foment une base de G, et $B_H \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ telle que les colonnes de B_H foment une base de H. Définir $g : \mathbb{R}^k \to G$ par $x \mapsto B_G x$, et $h : G \to \mathbb{R}^\ell$ par $x \mapsto B_H^\intercal x$. On a $h(x) = 0 \Leftrightarrow x \perp H$. On dèfinir $f := h \circ g$. Alors, car $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ avec $k > \ell$, il existe $y \in \ker(f)$, $y \neq 0$. Parce que $g(x) = B_G x$ et B_G est de rang plein, on a $0 \neq z := g(y) \in G$. Ca implique que $z \in \ker(h) \cap G$ et alors $z \perp H$.*

2. $$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \mathrm{Tr}(BA).$$

Exercice 2. Considérer l'ensemble de points

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Trouver un sous-espace de dimension 1 $H \trianglelefteq \mathbb{R}^2$ atteignant

$$D := \min_{\substack{H \trianglelefteq \mathbb{R}^2 \\ \dim(H)=1}} \sum_{a\in M} \mathrm{dist}(a, H)^2$$

et déterminer D.

Solution. *Soit A la matrice dont les lignes sont les points de M, i.e.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 5 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Par le Théorème 3.19 du cours, nous devons trouver une décomposition $A^T A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) U^T$, et la colonne de U correspondant à la valeur propre la plus grande engendrera le sous-espace voulu. Ainsi, on diagonalise $A^T A$:

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 26 & -20 \\ -20 & 26 \end{pmatrix} \\ \det(A^T A - \lambda I) &= (26 - \lambda)^2 - 400 \\ &= (\lambda - 46)(\lambda - 6) \\ \Rightarrow \qquad A^T A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 & \\ & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc le sous-espace $H = \{ t \binom{1}{-1} \mid t \in \mathbb{R} \}$ est le sous-espace voulu et la valeur D est

$$D = \sum_{a \in M} \operatorname{dist}(a, H) = \sum_{a \in M} \|a\|^2 - \frac{1}{2} \left(a^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^2 = 52 - 46 = 6.$$

Exercice 3. Trouver la solution minimale des systèmes d'équations:

$$x_1 + x_2 = b_1 , \qquad \begin{cases} x_1 = b_1 , \\ x_1 = b_2 , \\ x_1 = b_3 , \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 = b_1 , \\ 0x_1 = b_2 , \\ 7x_3 = b_3 , \\ 0x_2 = b_4 . \end{cases}$$

Solution. *Soit $A \in K^{m \times n}$, $x \in K^{n \times 1}$, $b \in K^{m \times 1}$. La solution minimale du système $Ax = b$, est définie comme $x^+ = A^+ b$. Elle satisfait $||Ax^+ - b||_2 \leq ||Ax - b||_2$, $\forall x \in K^{n \times 1}$.*

1. *La matrice associée au premier système est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = 1 , \; D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} , \; Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \end{pmatrix} .$$

2. La matrice associée au deuxième système est

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} , \; D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \; Q = 1 .$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \frac{1}{3}(b_1 + b_2 + b_3) .$$

3. La matrice associée au troisième système est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \; D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \; Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \begin{pmatrix} b_1/4 \\ 0 \\ b_3/7 \end{pmatrix} .$$

Exercice 4. Soit $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Montrer que

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

Solution. *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et soit $x \in \mathbb{C}^n$. On commence par montrer que*

$$\|Ax\|_2 \le \|A\|_F \|x\|_2.$$

Soient $A_1, \cdots, A_n$ les lignes de A. On a

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_2 &= \left\| \begin{pmatrix} A_1 x \\ \vdots \\ A_n x \end{pmatrix} \right\|_2 \\
&= \sqrt{\langle A_1^\intercal, x\rangle^2 + \cdots + \langle A_n^\intercal, x\rangle^2} \\
&\le \sqrt{\|A_1\|_2^2 \|x\|_2^2 + \cdots + \|A_n\|_2^2 \|x\|_2^2} \\
&= \sqrt{\|A_1\|_2^2 + \cdots + \|A_n\|_2^2}\|x\|_2 \\
&= \|A\|_F \|x\|_2,
\end{aligned}$$

où l'inégalité découle de Cauchy-Schwarz.

Soit $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et soient $b_1, \cdots, b_n$ les colonnes de la matrice B. Alors

$$\begin{aligned}
\|AB\|_F^2 &= \left\| \begin{pmatrix} Ab_1 & \cdots & Ab_n \end{pmatrix} \right\|_F \\
&= \sqrt{\|Ab_1\|_2^2 + \cdots + \|Ab_n\|_2^2} \\
&\le \sqrt{\|A\|_F^2 \|b_1\|_2^2 + \cdots + \|A\|_F^2 \|b_n\|_2^2} \quad \textit{par la première partie} \\
&= \|A\|_F \sqrt{\|b_1\|_2^2 + \cdots + \|b_n\|_2^2} \\
&= \|A\|_F \|B\|_F.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 13/10 & 9/10 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1 \\ 13/10 & 9/10 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 1, 2$, calculer l'approximation A_k de rang k de A, vue dans le cours, ainsi que

$$||A - A_1||_F, \qquad ||A - A_1||_2, \qquad ||A - A_2||_F, \qquad ||A - A_2||_2.$$

Solution. *On calcule les valeurs singulières :*

$$A^T A = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 13 & 5 & 13 & 5 \\ 9 & 15 & 9 & 15 \\ 10 & -10 & -10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 9 & 10 \\ 5 & 15 & -10 \\ 13 & 9 & -10 \\ 5 & 15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.88 & 3.84 & 0 \\ 3.84 & 6.12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& & \det(A^TA-\lambda I) &= 0 \\
\Leftrightarrow & & (4-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+9) &= 0 \\
\Leftrightarrow & & (\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-9) &= 0 \\
\Rightarrow & & (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) &= (3,2,1).
\end{aligned}$$

Puisqu'on ne s'intéresse qu'à A_1 et A_2, on ne doit calculer que les deux premiers vecteurs propres :

$$(A^TA-9I)v_1 = 0 \qquad\qquad (A^TA-4I)v_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5.12x+3.84y &= 0 \\ 3.84x-2.88y &= 0 \\ -5z &= 0 \end{cases} \qquad\qquad \Rightarrow \begin{cases} -0.12x+3.84y &= 0 \\ 3.84x+2.12y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors on calcule u_1 et u_2 :

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad\qquad u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

et on trouve, à l'aide de exercice a rendre 7 :

$$A_1 = \sigma_1 u_1 v_1^T = 3\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = A_1 + \sigma_2 u_2 v_2^T = 2\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 & 6/5 & 1 \\ 9/10 & 6/5 & -1 \\ 9/10 & 6/5 & -1 \\ 9/10 & 6/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que la norme matricielle $||\cdot||_2$ est définit comme

$$||A||_2 = \max_{x:\ ||x||_2=1} ||Ax||_2$$

avec la norme euclidienne habituelle au côté droit. Avec la notation du cours, on a

$$A - A_k = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T.$$

Comme les vecteurs v_i forment une base orthonormée, tout vecteur unitaire x peut être représenté comme une combination linéaire de ces vecteurs, c-à-d $x = \sum \lambda_i v_i$, avec des coefficients λ_i tels que $\sum \lambda_i^2 = 1$. Les vecteurs u_i forment également une base orthonormée, *donc*

$$\|(A-A_k)x\|_2^2 = \left\| \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T \left(\sum \lambda_i v_i\right) \right\|_2^2 = \left\| \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i \lambda_i u_i v_i^T v_i \right\|_2^2$$
$$= \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2 \lambda_i^2 \|u_i\|_2^2 \leq \sigma_{k+1}^2 \sum_{i=k+1}^{r} \lambda_i^2 \leq \sigma_{k+1}^2 \sum_{i=k+1}^{r} \lambda_i = \sigma_{k+1}^2.$$

Mais on voit facilement que cette borne est atteinte par $x = v_{k+1}$. Par conséquent, $||A - A_k||_2 = \sigma_{k+1}$, et les normes sont :

$$||A - A_1||_2 = 2, \qquad ||A - A_2||_2 = 1.$$

On observe que les valeurs singulières de $(A - A_k)$ sont $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_r$, donc on utilise Lemme 3.23 pour obtenir

$$||A - A_1||_F = \left(\sum_{i=2}^{3} \sigma_i^2\right)^{1/2} = \left(\sigma_2^2 + \sigma_3^2\right)^{1/2} = \sqrt{5},$$
$$||A - A_2||_F = \left(\sum_{i=3}^{3} \sigma_i^2\right)^{1/2} = \left(\sigma_3^2\right)^{1/2} = 1.$$

Exercice 6.

a) Pour chaque matrice A, montrer que $\sigma_k \leq \frac{||A||_F}{\sqrt{k}}$, pour toutes les valeurs singulières $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

b) Pour $1 \leq k \leq r$, montrer qu'il existe une matrice B de rang plus petit ou égal a k telle que $||A - B||_2 \leq \frac{||A||_F}{\sqrt{k}}$, où on dénote $\|A\|_2 = |||A||| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_2$.

c) Est-ce que la norme euclidienne du côté gauche de l'inégalité dans (b) peut être remplacée par la norme de Frobenius ?

Solution.

a) On sait que $||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2}$ où $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ sont les valeurs singulières de A (Lemme 3.23). Donc

$$k\sigma_k^2 \leq \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \leq \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 = ||A||_F^2.$$

et on obtient $\sqrt{k}\sigma_k \leq ||A||_F$.

b) On a vu dans le solution pour ex. 5 que

$$\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$$

(où on met $\sigma_{r+1} = 0$). Donc, on utilise (a) et on obtient que $||A - A_k||_2 = \sigma_{k+1} \leq \sigma_k \leq \frac{||A||_F}{\sqrt{k}}$.

c) On sait aussi que pour toute matrice B telle que rang$(B) \leq k$,

$$||A - B||_F^2 \geq ||A - A_k||_F^2 = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2.$$

Pour montrer que l'affirmation est fausse en général si on remplace la norme euclidienne par la norme de Frobenius, on cherche A et k tels que $||A - A_k||_F^2 > \frac{1}{k}||A||_F^2$, c'est-à-dire

$$\sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2 > \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{r} \sigma^2.$$

Soit $A = I_5$ (la matrice identité de taille 5×5), et $k = 2$. Alors on a $r = 5$, $\sigma_1 = \cdots = \sigma_5 = 1$, $||A||_F^2 = 5$ et finalement

$$||A - A_2||_F^2 = \sum_{i=3}^{5} \sigma_i = 3 > \frac{5}{2} = \frac{||A||_F^2}{k}$$

Exercice 7. Montrer Lemme 4.3 dans la polycopié:

On considère le système suivant

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}_1'(t) &=& a_{11}\mathbf{x}_1(t) \quad + \cdots + \quad a_{1n}\mathbf{x}_n(t) \\ \mathbf{x}_2'(t) &=& a_{21}\mathbf{x}_1(t) \quad + \cdots + \quad a_{2n}\mathbf{x}_n(t) \\ &\vdots& \\ \mathbf{x}_n'(t) &=& a_{n1}\mathbf{x}_1(t) \quad + \cdots + \quad a_{nn}\mathbf{x}_n(t) \end{array} \tag{1}$$

où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{X} = \{\mathbf{x} \colon \mathbf{x} \text{ est une solution du système (1)}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Solution. *Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{X}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n})$ la matrice de système (1). Car $\mathbf{x} \in \mathscr{X}$, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$, et le même pour $\mathbf{y}$. Donc,*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{x}(t) + \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{y}(t) \\ &= A\mathbf{x}(t) + \alpha A\mathbf{y}(t) \\ &= A(\mathbf{x}(t) + \alpha\mathbf{y}(t)). \end{aligned}$$

Alors, $\mathscr{X}$ est complété sous addition et multiplication par un scalaire. Les autres propriétés resultant car $\mathscr{X}$ est une sous-ensemble de l'espace des fonctions differentielles $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Exercice 8. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Montrer que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Solution. *Par définition, on a*

$$e^{tA} = I + At + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{At} &= 0 + A + \frac{1}{2!}2tA^2 + \frac{1}{3!}3t^2A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}nt^{n-1}A^n + \cdots \\
&= 0 + A + \frac{1}{1!}tA^2 + \frac{1}{2!}t^2A^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}A^n + \cdots \\
&= A(I + At + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots) \\
&= Ae^{At}.
\end{aligned}$$

Exercice 9. Soient $A, B, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Montrer que $e^A = P^{-1}e^BP$.

Solution. *Par définition,*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k.$$

Or, comme $PP^{-1} = I$, on a

$$A^k = (P^{-1}BP)^k = \underbrace{P^{-1}BPP^{-1}BP \cdots P^{-1}BP}_{k\ fois} = P^{-1}B^kP,$$

donc

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}P^{-1}B^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B^k\right)P = P^{-1}e^BP$$

où on peut échanger l'ordre de multiplication et d'addition car la somme converge.