Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 7 - Corrigé

Exercice 1. Montrer partie (3.5) de théorème 3.13: Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Si U dénote un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\setminus\{0\}} R_A(x).$$

Solution. *Soit $\{u_1,\dots,u_n\}$ une base orthonormale de vecteurs propres associés à $\lambda_1 \geq \dots, \geq \lambda_n$ respectivement. On fixe un entier k. Soit U un espace de dimension $n-k+1$. Clairement, $span\{u_1,\dots,u_k\} \cap U \supsetneq \{0\}$, alors il existe un vecteur $0 \neq x = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \in U$. Comme*

$$R_A(x) = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2} \geq \lambda_k,$$

on a que $\max_{x\in U\setminus\{0\}} R_A(x) \geq \lambda_k$. Comme c'est vrai pour chaque U de dimension $n-k+1$, on conclut que

$$\min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\setminus\{0\}} R_A(x) \geq \lambda_k.$$

Si on prend $W = span\{u_k,\dots,u_n\}$, pour chaque vecteur $0 \neq x = \sum_{i=k}^n \beta_i u_i \in W$, on a

$$R_A(x) = \frac{\sum_{i=k}^n \beta_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^k \beta_i^2} \leq \lambda_k$$

et $R_A(u_k) = u_k^T A u_k = \lambda_k$. Donc $\max_{x\in W\setminus\{0\}} R_A(x) = \lambda_k$ et

$$\min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\setminus\{0\}} R_A(x) \leq \max_{x\in W\setminus\{0\}} R_A(x) = \lambda_k.$$

Finalement, on conclut que

$$\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\setminus\{0\}} R_A(x).$$

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Soit $K = \{l_1,\dots,l_{n-k}\} \subseteq \{1,\dots,n\}$ où $1 \leq l_1 < \cdots < l_{n-k} \leq n$ et soit $B \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ une sous-matrice symétrique de A définie par $B_{ij} = A_{l_i l_j}$ (ainsi K marque les lignes et les colonnes de A qui apparaissent dans la matrice B.)

Soient $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-k}$ les valeurs propres de B. Montrer que $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+k}$, pour $i = 1,\dots,n-k$.

Solution. *On a une matrice symétrique A dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, $K = \{l_1, \ldots, l_{n-k}\}$ où $1 \leq l_1 < \cdots < l_{n-k} \leq n$ et une matrice symétrique B dont les valeurs propres sont $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{n-k}$ et telle que $B_{ij} = A_{l_i l_j}$. On veut montrer que $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+k}$ pour $i = 1, \ldots, n-k$.*

Rappel:

$$\lambda_i = \max_{\substack{U \subseteq \mathbb{R}^n: \\ dim(U)=i}} \min_{x \in U \setminus \{0\}} R_A(x) = \min_{\substack{U \subseteq \mathbb{R}^n: \\ dim(U)=n-i+1}} \max_{x \in U \setminus \{0\}} R_A(x)$$

où $R_A(x)$ est le quotient Rayleigh-Ritz. On a vu que $R_A(x) = R_A(\frac{x}{||x||})$ et $R_A(\frac{x}{||x||}) = (\frac{x}{||x||})^T A (\frac{x}{||x||})$, donc on peut écrire

$$\lambda_i = \max_{\substack{U \subseteq \mathbb{R}^n: \\ dim(U)=i}} \min_{\substack{x \in U: \\ ||x||=1}} x^T A x = \min_{\substack{U \subseteq \mathbb{R}^n: \\ dim(U)=n-i+1}} \max_{\substack{x \in U: \\ ||x||=1}} x^T A x$$

pour $i = 1, \ldots, n$. Similairement,

$$\mu_i = \max_{\substack{V \subseteq \mathbb{R}^{n-k}: \\ dim(V)=i}} \min_{\substack{x \in V: \\ ||x||=1}} x^T B x = \min_{\substack{V \subseteq \mathbb{R}^{n-k}: \\ dim(V)=n-k-i+1}} \max_{\substack{x \in V: \\ ||x||=1}} x^T B x$$

Maintenant, soit $f : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$f(x)_j = \begin{cases} x_i & si\ j = l_i, \\ 0 & autrement. \end{cases}$$

Ainsi, un vecteur $f(x)$ est obtenu de x en écrivant x_i sur la position l_i et zéros ailleurs. Similairement, on pose $f(U) = \{f(x) : x \in U\}$ pour tout $U \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$. On observe que $||x|| = 1 \Leftrightarrow ||f(x)|| = 1$ et aussi que $dim(U) = dim(f(U))$.

Finalement, on voit que pour $x \in \mathbb{R}^{n-k}$, on a $x^T B x = (f(x))^T A f(x)$ (vérifier!). Maintenant, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-k\}$ on a que

$$\begin{aligned}
\mu_i &= \max_{\substack{V \subseteq \mathbb{R}^{n-k}: \\ dim(V)=i}} \min_{\substack{x \in V: \\ ||x||=1}} x^T B x \\
&= \max_{\substack{V \subseteq \mathbb{R}^{n-k}: \\ dim(V)=i}} \min_{\substack{x \in V: \\ ||f(x)||=1}} f(x)^T A f(x) \\
&= \max_{\substack{U \subseteq \mathbb{R}^n; dim(U)=i: \\ \exists V \subseteq \mathbb{R}^{n-k}: U = f(V)}} \min_{\substack{y \in U: \\ ||y||=1}} y^T A y \\
&\leq \max_{\substack{U \subseteq \mathbb{R}^n: \\ dim(U)=i}} \min_{\substack{y \in U: \\ ||y||=1}} y^T A y \\
&= \lambda_i
\end{aligned}$$

où l'inégalité est vraie, car on prend le maximum sur un ensemble plus grand.

Similarement,

$$\begin{aligned}\mu_i &= \min_{\substack{V\subseteq\mathbb{R}^{n-k}:\\ dim(V)=n-k-i+1}} \max_{\substack{x\in V:\\ ||x||=1}} x^T Bx \\ &= \min_{\substack{V\subseteq\mathbb{R}^{n-k}:\\ dim(V)=n-k-i+1}} \max_{\substack{x\in V:\\ ||f(x)||=1}} f(x)^T Af(x) \\ &= \min_{\substack{U\subseteq\mathbb{R}^{n};dim(U)=n-k-i+1:\\ \exists V\subseteq\mathbb{R}^{n-k}:U=f(V)}} \max_{\substack{y\in U:\\ ||y||=1}} y^T Ay \\ &\geq \min_{\substack{U\subseteq\mathbb{R}^{n}:\\ dim(U)=n-k-i+1}} \max_{\substack{y\in U:\\ ||y||=1}} y^T Ay \\ &= \lambda_{i+k}\end{aligned}$$

où l'inégalité est vraie, car on prend le min sur un ensemble plus grand.

Exercice 3. Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$ une matrice de rang r, et soient $P\in\mathbb{K}^{m\times m}$ et $Q\in\mathbb{K}^{n\times n}$ des matrices unitaires telles que $A=PDQ$, avec $D\in\mathbb{R}^{m\times n}_{\geq 0}$ diagonale et $d_{i,i}\geq d_{i+1,i+1}$ pour $i=1,\dots,\min\{n-1,m-1\}$.

Montrer que les colonnes de Q^* sont les vecteurs propres de A^*A, que celles de P sont les vecteurs propres de AA^*, et que les coefficients positifs diagonaux de D sont les valeurs singulières de A.

Solution. *On veut montrer que les colonnes de Q^* (resp. de P), que l'on note q_i (resp. p_i), sont les vecteurs propres de A^*A (resp. AA^*). On a*

$$A^*A=(PDQ)^*(PDQ)=Q^*DP^*PDQ=Q^*D^*DQ=(Q^*)D^*D(Q^*)^{-1},$$

car $P^*P=I_m$. La matrice $(D^*D)\in\mathbb{K}^{n\times n}$ est diagonale, avec comme éléments diagonaux non nuls $\sigma_1^2,\dots,\sigma_r^2$ et des zéros en plus si $r<n$. Ainsi, A^*A est diagonalisable avec comme décomposition $(Q^*)(D^*D)(Q^*)^{-1}$ (Q^* est unitaire et (D^*D) diagonale). Or $A^*A=Q^*(D^*D)(Q^*)^{-1}$ si et seulement si les colonnes de Q^* sont les vecteurs propres de A^*A associés aux valeurs propres sur la diagonale de D^*D. Les valeurs propres de A^*A sont $\sigma_1^2,\dots,\sigma_r^2$, donc les valeurs singulières de A sont bien $\sigma_1,\dots,\sigma_r$.
De même,

$$AA^*=(PDQ)(PDQ)^*=PDQQ^*D^*P^*=PDD^*P^*=PDD^*P^{-1},$$

et P diagonalise AA^* et les colonnes de P sont les vecteurs propres de AA^*.

Exercice 4. Déterminer les valeurs singulières des matrices suivantes. Pour les matrices A_3 à A_6 donner aussi la décomposition en valeurs singulières (SVD).

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-3\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}-5&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}7&1\\0&0\\5&5\end{pmatrix},\qquad A_4=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&1\end{pmatrix},$$

$$A_5=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},\qquad A_6=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&-2\end{pmatrix}.$$

Solution.

(i) $A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ *et les valeurs propres sont* $\lambda_1 = 9$, *et* $\lambda_2 = 1$ *(on veut* $\lambda_1 \geq \lambda_2$*).* *Ainsi les valeurs singulières de* A_1 *sont données par* $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, *i.e.,* $\sigma_1 = 3$ *et* $\sigma_2 = 1$.

(ii) $A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et les valeurs singulières sont* $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{25} = 5$ *et* $\sigma_2 = 0$.

(iii) $A_3^T A_3 = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix}$ *et le polynôme caractéristique est* $p_{A_3^T A_3}(\lambda) = \lambda^2 - 100\lambda + 900 = (\lambda - 90)(\lambda - 10)$. *Les valeurs propres sont* $\lambda_1 = 90$ *et* $\lambda_2 = 10$. *Les valeurs singulières de* A_3 *sont* $\sigma_1 = 3\sqrt{10}$ *et* $\sigma_2 = \sqrt{10}$, *ainsi la matrice* $D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ *est donnée par*

$$D = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 *et* λ_2 *sont*

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *est*

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. *On commence par trouver une base orthonormée* (v_1, v_2, v_3) *de* $\mathbb{R}^2$, *où pour* $i = 1, 2$

$$v_i = \frac{1}{\sigma_i} A u_i.$$

Ainsi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On doit donc trouver un vecteur v_3 *normalisé et orthogonal à* v_1 *et* v_2. *On trouve, par exemple,*

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et ainsi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on verifie que

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

(iv) $A_4^T A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et les valeurs propres sont* $\lambda_1 = 3$ *et* $\lambda_2 = 2$*. Les valeurs singulières de* A_3 *sont* $\sigma_1 = \sqrt{3}$ *et* $\sigma_2 = \sqrt{2}$*, ainsi la matrice* $D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ *est donnée par*

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 *et* λ_2 *sont*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *est*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$*. On commence par trouver*

$$v_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i.$$

Ainsi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a que (v_1, v_2) *n'est pas une base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$*, on doit donc trouver un vecteur* v_3 *normalisé et orthogonal à* v_1 *et* v_2*. On trouve, par exemple,*

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et ainsi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(v) *On a* $A_5^T A_5 = (9)$ *et avec comme seule valeur propre* $\lambda_1 = 9$*. Le vecteur propre normalisé associé à* $\lambda_1 = 9$ *est* $v_1 = 1$*. Ainsi* $Q = (1)$*. La matrice* $D \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ *est donnée par* $D = (3\ 0\ 0)^T$*. Pour la matrice* P*, on commence par trouver*

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A_5 u_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il faut maintenant compléter (v_1) *en une base orthonormée* (v_1, v_2, v_3) *de* $\mathbb{R}^3$*. On complète* (v_1) *par* $v_2 = \frac{1}{3}(2\ -1\ 2)^T$ *et* $v_3 = \frac{1}{3}(2\ 2\ -1)^T$*. On obtient*

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(vi) *On calcule la SVD de* $(A_6)^T$. *On commence par calculer* $(A_6^T)^T A_6^T$: $(A_6^T)^T A_6^T = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$, *avec* $\lambda_1 = 25$ *et* $\lambda_2 = 9$. *La matrice* D *est*

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 *et* λ_2 *sont*

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *est*

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs v_1 *et* v_2 *sont donnés par*

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On complète en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ *avec*

$$v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On a que $A^T = PDQ$. *La SVD pour* A *est donnée par* $A = (PDQ)^T = Q^T D P^T$.

Exercice 5.

1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ une matrice carrée inversible. Déterminer une décomposition SVD de A^{-1}.

2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ est une matrice carrée inversible, alors $|\det(A)|$ est égal au produit des valeurs singulières de A.

3. Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice carrée symétrique définie positive, alors ses valeurs singulières sont ses valeurs propres.

4. Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice carrée symétrique, alors ses valeurs singulières sont les valeurs absolues de ses valeurs propres non-nulles.

Solution.

1. *Soit une SVD de A, i.e. $A = PDQ$. Comme Q est unitaire, on a $Q^* = Q^{-1}$. La matrice D sera diagonale avec ses entrées $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, où $r = rank(A)$. Or comme la matrice A est inversible, on a $rank(A) = n$. Ceci implique que D est inversible, d'inverse D^{-1} qui est toujours diagonale, et on obtient*

$$A^{-1} = (PDQ)^{-1} = Q^{-1}D^{-1}P^{-1} = Q^*D^{-1}P^*.$$

2. *Soit une SVD de A, i.e. $A = PDQ$. Comme A est D sont de la même taille, on a que D est une matrice carrée, ainsi*

$$|\det(A)| = |\det(P)||\det(D)||\det(Q)| = |\det(D)| = |\sigma_1 \cdots \sigma_n|.$$

   En effet, $1 = \det(I_n)\det(PP^*) = \det(P)\det(P^*) = \det(P)\overline{\det(P)}$ *implique* $|\det(P)| = 1$.

   Ainsi, $|\det(A)| = (\sigma_1 \cdots \sigma_n)$. *Comme la matrice A est inversible,* $\det(A) \neq 0$ *et on a bien que* $|\det(A)|$ *est le produit des valeurs singulières (que l'on a définies comme étant positives).*

3. *La matrice A est symétrique, donc elle est diagonalisable en une base orthonormée, i.e. il existe une matrice diagonale D et une matrice unitaire P telles que $A = PDP^* = PDP^{-1}$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A; on les dénote par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On cherche maintenant une SVD de A. On a $A^TA = AA = A^2$ et*

$$A^2 = (PDP^T)^T(PDP^T) = PD^TP^TPDP^T = P(D^TD)P^T,$$

   ainsi les éléments diagonaux de D^TD sont les valeurs propres de A^TA, i.e. $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$. On a que les valeurs singulières de A sont les racines des valeurs propres λ_i^2 non-nulles, i.e. $\sigma_i = |\lambda_i|$, $i = 1, \ldots, n$. Il faut montrer que $\lambda_i > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Comme la matrice A est définie positive, on a que les λ_i sont positifs et ainsi $\sigma_i = \lambda_i > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

4. *Par le même raisonnement qu'au point précédant, on a $\sigma = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$.*

Exercice 6. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec une decomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. La pseudoinverse de A est défini comme $A^+ = Q^* D^+ P^*$, où D^+ est la matrice défini dans la Définition 3.8. Montrer que A^+ satisfait les quatre conditions de Penrose:

1. $AA^+A = A$.
2. $A^+AA^+ = A^+$.
3. $(AA^+)^* = AA^+$.
4. $(A^+A)^* = A^+A$.

Solution.

1. $AA^+A = PDQQ^*D^+P^*PDQ = PDD^+DQ = PDQ = A$.

2. $A^+AA^+ = Q^*D^+P^*PDQQ^*D^+P^* = Q^*D^+DD^+P^* = P^*D^+Q^* = A^+$.

3. $(AA^+)^* = (PDQQ^*D^+P^*)^* = (PDD^+P^*)^* = P(DD^+)^*P^* = P(DD^+)P^* = PDQQ^*D^+P^* = AA^+$.

4. $(A^+A)^* = (Q^*D^+P^*PDQ)^* = (Q^*D^+DQ)^* = Q^*(D^+D)^*Q = Q^*(D^+D)Q = Q^*D^+P^*PDQ = A^+A$.

Exercice 7. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer les propriétés suivantes de la matrice pseudoniverse:

1. $(A^+)^+ = A$.
2. $(A^+)^* = (A^*)^+$.

Solution. *Les deux résultats suivent immédiatement de la définition et de l'unicité de la matrice pseudoinverse. On a par exemple pour le premier que*

$$AA^+A = A\,,\ \ A^+AA^+ = A^+\,,\ \ (AA^+)^* = AA^+\,,\ \ (A^+A)^* = A^+A\,,$$

et

$$A^+(A^+)^+A^+ = A^+\,,\ \ (A^+)^+A^+(A^+)^+ = (A^+)^+\,,\ \ (A^+(A^+)^+)^* = A^+(A^+)^+\,,\ \ ((A^+)^+A^+)^* = (A^+)^+A^+\,.$$

Puisque pour une matrice A, il existe une unique matrice qui satisfait les quatre conditions de Penrose, on doit avoir $A = (A^+)^+$.

Exercice 8. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer que la pseudoinverse satisfait les relations suivantes:

1. $A^+ = A^+(A^+)^* A^*$.
2. $A = AA^*(A^+)^*$.
3. $A^* = A^*AA^+$.
4. $A^+ = A^*(A^+)^*A^+$.
5. $A = (A^+)^*A^*A$.
6. $A^* = A^+AA^*$.

Solution.

1. *Puisque AA^+ est hemitienne, on a que $AA^+ = (AA^+)^* = (A^+)^*A^*$. Si on multilplie pour A^+, on obtient*
$$A^+ = A^+(A^+)^*A^* \,.$$
2. *Il suffit de remplacer A avec A^+, et utiliser le fait que $A = (A^+)^+$.*
3. *Il suffit de remplacer A avec A^*, et utiliser le fait que $(A^*)^+ = (A^+)^*$.*

Les resultats 4-6 peuvent être obtenus de la même manière utilisant le fait que A^+A est hermitienne.

Exercice 9. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer que en général on a

$$(AA^*)^+ = (A^*)^+A^+ \,. \tag{1}$$

Donc utiliser (1) pour montrer

$$A^+ = A^*(AA^*)^+ = (A^*A)^+A^* \,.$$

Indication: Utiliser les résultats de l'exercice 8.

Solution. *Soit $B = (A^*)^+A^+$. On a*

$$\begin{aligned} AA^* &= AA^*(A^+)^*A^* && \textit{par rel. 2 ex. 8}\,, \\ &= AA^*(A^+)^*A^+AA^* && \textit{par rel. 6 ex. 8}\,, \\ &= AA^*BAA^* && \textit{par } (A^+)^* = (A^*)^+ \,. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} B &= (A^*)^+A^+ \\ &= (A^+)^*A^+AA^+ && \textit{par déf. et } (A^+)^* = (A^*)^+ \,, \\ &= (A^+)^*A^+AA^*(A^+)^*A^+ && \textit{par rel. 4 ex. 8}\,, \\ &= BAA^*B && \textit{par } (A^+)^* = (A^*)^+ \,. \end{aligned}$$

En fin on a

$$
\begin{aligned}
(AA^*)B &= AA^*(A^*)^+A^+ \\
&= (AA^*(A^+)^*)A^+ && \textit{par } (A^*)^+ = (A^+)^*\,, \\
&= AA^+ && \textit{par rel. 2 ex. 8}\,.
\end{aligned}
$$

Comme AA^+ est hermitienne par définition, la condition ii) de Penrose (polycopie) est vraie. Également

$$
\begin{aligned}
B(AA^*) &= (A^*)^+A^+AA^* \\
&= (A^+)^*(A^+AA^*) && \textit{par } (A^*)^+ = (A^+)^*\,, \\
&= (A^+)^*A^* && \textit{par rel. 6 ex. 8}\,,
\end{aligned}
$$

qui est aussi hermitienne par définition. Donc B satisfait les quatre conditions de Penrose. Comme il n'y a qu'une matrice qui les satisfait - la matrice pseudoinverse - on a que

$$
(AA^*)^+ = B = (A^*)^+A^+. \tag{2}
$$

Si on remplace A avec A^* en (2), on obtient également

$$
(A^*A)^+ = A^+(A^*)^+\,. \tag{3}
$$

Maintenant on note que

$$
\begin{aligned}
A^*(AA^*)^+ &= A^*(A^*)^+A^+ && \textit{par } (2)\,, \\
&= A^+ && \textit{par rel. 4 ex. 8}\,,
\end{aligned}
$$

et que

$$
\begin{aligned}
(A^*A)^+A^* &= A^+(A^*)^+A^* && \textit{par } (3)\,, \\
&= A^+ && \textit{par rel. 1 ex. 8}\,.
\end{aligned}
$$