Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 6 - Corrigé

Exercice 1. Soit V un espace hermitien. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \; \|v\| \qquad \forall \; u, v \in V.$$

Solution. *Soient $u, v \in V$. Si $v = 0$, on a trivialement linégalité de Cauchy-Schwarz: cest une égalité et les vecteurs sont effectivement colinéaires. Supposons donc maintenant que $v \neq 0$; on obtient pour $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||u + \lambda v||^2 \\ &= ||u||^2 + \langle u, \lambda v\rangle + \langle \lambda v, u\rangle + ||\lambda v||^2 \\ &= ||u||^2 + \langle u, \lambda v\rangle + \overline{\langle u, \lambda v\rangle} + ||\lambda v||^2 \\ &= ||u||^2 + 2Re \, \langle u, \lambda v\rangle + ||\lambda v||^2 \\ &= ||u||^2 + 2Re \left(\overline{\lambda} \, \langle u, v\rangle\right) + |\lambda|^2 ||v||^2 \end{aligned}$$

Si on prend $\lambda = -\langle u, v\rangle / ||v||^2$, on trouve que

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||u||^2 - 2Re \left(\frac{\overline{\langle u, v\rangle} \, \langle u, v\rangle}{||v||^2} \right) + \frac{|\, \langle u, v\rangle \,|^2}{||v||^2} \\ &= ||u||^2 - \frac{|\, \langle u, v\rangle \,|^2}{||v||^2} \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement $u = -\lambda v$.

Exercice 2. Montrer qu'un espace hermitien V de dimension $n \in \mathbb{N}_{>0}$ possède une base B tel que $\langle x, y\rangle = [x]_B^T \cdot \overline{[y]_B}$, où $x \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ est le produit hermitien standard dans $\mathbb{C}^n$.

Solution. *Soit V un espace hermitien de dimension fini. Par le Corollaire 2.32, on sait que V possède une base orthonormale $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$. Ça veut dire que $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$. Soient $x, y \in V$. On peut écrire $x = \sum_i \alpha_i e_i$ et $y = \sum_j \beta_j e_j$. On obtient alors*

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \left\langle \sum_i \alpha_i e_i, \sum_j \beta_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \, \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i} \\ &= [x]_B^T \cdot \overline{[y]_B} \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que toutes les valeurs propres de la matrice $A + B$ sont aussi strictement positives.

Solution. *Comme A et B ont seulement les valeurs propres positives, les formes quadratiques $Q_A(x)$ et $Q_B(x)$ définies par $Q_A(x) = x^T Ax$ et $Q_B(x) = x^T Bx$ sont définies positives. Maintenant, soit Q_{A+B} définie par $Q_{A+B}(x) = x^T(A+B)x$. Alors $Q_{A+B}(x) = Q_A(x) + Q_B(x) > 0$ pour tous vecteurs x non nul, donc Q_{A+B} est une forme définie positive, et ça signifie que la matrice $A+B$ posséde seulement des valeurs propres positives.*

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $A = B^T B$.

Solution. *A est une matrice symétrique, alors il existe une matrice orthogonale P telle que*

$$P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres de A. Soit D la matrice $P^T AP$ diagonale. Comme A est définie positive, on a $\lambda_i > 0$ pour tout $i = 1\ldots, n$ et alors $D = C^T C$, où

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Comme $P^T = P^{-1}$, on obtient que

$$A = PDP^T = PC^T CP^T = PC^T P^T PCP^T = (PC^T P^T)(PCP^T) = (PCP^T)^T(PCP^T).$$

ainsi $A = B^T B$, où $B = PCP^T$. Il reste à montrer que B est vraiment symétrique et définie positive. Les valeurs propres de B sont les mêmes de que les valeurs propres de C, donc B est définie positive. De plus,

$$B^T = (PCP^T)^T = (P^T)^T C^T P^T = PCP^T = B.$$

Exercice 5. Pour chaque forme suivante Q, décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Solution. *a) On a que* $Q(x) = x^T Ax$ *où* $A = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. *L'équation charactéristique de* A *est*

$$0 = \det(A - \lambda I) = (13 - \lambda)(7 - \lambda) - 16 = \lambda^2 - 20\lambda + 75 = (\lambda - 15)(\lambda - 5)$$

ainsi les valeurs propres de A *sont* $\lambda_1 = 15$ *et* $\lambda_2 = 5$. *Car tous les valeurs propres de* A *sont positifs,* A *est définie positive, et donc la forme quadratique* Q *est définie positive.*

b) Similairement, $Q(x) = x^T Ax$ *où* $A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. *Comme dans a), on trouve que l'équation charactéristique de* A *est*

$$0 = \det(A - \lambda I) = (11 - \lambda)(-1 - \lambda) - 64 = \lambda^2 - 10\lambda - 75 = (\lambda - 15)(\lambda + 5)$$

et les valeurs propres de A *sont* $\lambda_1 = 15$ *et* $\lambda_2 = -5$. *Cela signifie que* A *et* $Q(x)$ *sont indéfinies. Pour trouver les vecteurs* x *et* y *qui satisfont* $Q(x) > 0$ *et* $Q(y) < 0$, *on cherche les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres* λ_1 *et* λ_2. *On trouve* $x = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Finalement, on vérifie que* x *et* y *sont les vecteurs satisfaisant:*

$$Q(x) = x^T Ax = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{30}{\sqrt{5}} \\ \frac{15}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 15 > 0$$

et similairement

$$Q(y) = y^T Ay = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-5}{\sqrt{5}} \\ \frac{10}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = -5 < 0.$$

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique. Montrer que A est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont non négatifs, c'est-à-dire $\det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
Rappel: Soit $K = \{l_1, \ldots, l_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ où $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_k \leq n$. La matrice $B_K \in \mathbb{R}^{k \times k}$ est la matrice $(B_K)_{ij} = A_{l_i l_j}, 1 \leq i, j \leq k$.

Solution. $\Rightarrow$ *Soit* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *une matrice symétrique semi-définie positive. Soit* $K = \{l_1, \ldots, l_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *où* $l_1 < l_2 < \cdots < l_k$. *On va montrer que* B_K *est semi-définie positif, ainsi tous les valeurs propres de* B_K *son non-négatifs et* $\det(B_K) \geq 0$.
Soit $f : \mathbb{R}^{|K|} \to \mathbb{R}^n$ *tel que* $f(y)_{l_j} = y_j$ *et* $f(y)_i = 0$ *si* $i \notin K$. *Ainsi, un vecteur* $f(x)$ *est obtenu de* x *par écrivant* y_i *sur la position* l_i *et zéros ailleurs. On note que si* $y \in \mathbb{R}^{|K|}$, *alors* $y^T B_K y = f(y)^T A f(y) \geq 0$ *(vérifier!). Donc* B_K *est semi-définie positive et* $\det(B_K) \geq 0$.

$\Leftarrow$ *On montre maintenant l'autre sens en prouvant la contraposée par induction sur la taille de* A. *C'est-à-dire, on montre que* A *n'est pas semi-définie positive implique que* $\det(B_K) < 0$ *pour un ensemble d'indices* K.

Initialisation: Si $A = (a)$, alors $a < 0$ car A n'est pas semi-définie positive. Ainsi $\det(A) < 0$ *et on a un mineur symétrique A tel que* $\det(A) < 0$.
Induction: On suppose que la déclaration est vrai pour toute matrice B de taille $n - 1$, et on montre que elle est vrai pour A de taille n.

Soit A une matrice symétrique de taille n pas semi-définie positive. Comme A n'est pas semi-définie positive, il y a au moins une valeur propre négative. Soit v un vecteur normalisé tel que $Av = \lambda v$, avec $\lambda < 0$. Si λ est la seule valeur propre (avec multiplicitè 1) ≤ 0 de A alors on a que $\det(A) < 0$*, ainsi on a montré qu'il existe un mineur symétrique de A tel que* $\det(B_K) < 0$ *(en l'occurrence $B_K = A$). Si λ n'est pas la seule valeur propre < 0 (ou avec un multiplicitè ≥ 2) alors il existe $\mu \leq 0$ et un vecteur u de norme 1 orthogonal à v, qui est le vecteur propre correspondant à la valeur propre μ. On prend alors $w = v + su$, avec $s \in \mathbb{R}$ de sorte á avoir au moins une coordonnée égale à zéro, par exemple, $w_i = 0$. On choisit alors A_{-i} la sous-matrice de A obtenue en enlevant la colonne et la ligne i. On note w_{-i} le vecteur obtenu de w en enlevant la coordonne i. Alors,*

$$w_{-i}^T A_{-i} w_{-i} = w^T A w = \lambda + s^2 \mu < 0.$$

Ainsi A_{-i} n'est pas semi-définie positive. Par l'hypothése de récurrence, qu'il existe un ensemble d'indices K tel que $\det(A'_K) < 0$*, alors il existe un mineur symétrique de A négatif.*

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique.

a) Montrer que A est définie négative, si et seulement si $(-1)^k \det(B_k) > 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Montrer que A est semi-définie négative, si et seulement si $(-1)^{|K|} \det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Solution. *a) D'abord, on note que A est définie négative si et seulement si la matrice $-A$ est définie positive. C'est parce que pour tout x non nul $x^T Ax < 0$ si et seulement si $x^T(-A)x > 0$.*

Par Théorème 3.10, $(-A)$ est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs, c'est-à-dire det$(-B_k) > 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ où $(-B_k)_{ij} = -A_{ij}$, $1 \leq i, j, \leq k$. Cependant, par les propriétés basiques du déterminant, $\det(-B_k) = (-1)^k \det(B_k)$ *parce que B_k est une matrice avec la dimension $k \times k$. On conclut que A est définie négative si et seulement si* $(-1)^k \det(B_k) \geq 0$ *pout tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.*

b) Comme dans partie a), A est semi-définie négative si et seulement si la matrice $-A$ est semi-définie positive. Par Exercice 4, on voit que $(-A)$ est semi-définie positive si et seulement si pout tout $K = \{l_1, \ldots, l_k\}$ où $1 \leq l_1 < \cdots < l_k \leq n$ on a que $\det(-B_K) \geq 0$ *où $(-B_K)_{ij} = (-A)_{l_i l_j}$, $1 \leq i, j, \leq k$. Comme* $\det(-B_K) = (-1)^{|K|} \det(B_K)$*, on conclut que A est semi-définie négative si et seulement si* $(-1)^{|K|} \det(B_K) \geq 0$ *pout tout $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$.*

Exercice 8. Une matrice A lequelle est réelle symétrique, différente de la matrice zéro, telle que toute composante sur la diagonale est zéro est indéfinie. C'est-à-dire, il existe deux vecteurs $u \neq v$ tels que $u^T A u < 0 < v^T A v$.

Solution. *Pour les valeurs propres λ_i de A, on sait que $trA = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. La matrice A n'est pas egale a zero, alors il existe deux valeurs propres $\lambda_- < 0 < \lambda_+$. Pour les vecteurs propres correspondantes, on a $v_-^T A v_- < 0 < v_+^T A v_+$.*