Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 8

Exercice 1.

1. Soient $G, H \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire standard tels que $k = \dim(G) > \dim(H)$. Montrer que G possède une base orthonormale $w_1, \ldots, w_k$ telle que $w_k \perp H$.

2. Pour deux matrices $A, B \in K^{n\times n}$, montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice 2. Considérer l'ensemble de points

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Trouver un sous-espace de dimension 1 $H \trianglelefteq \mathbb{R}^2$ atteignant

$$D := \min_{\substack{H \trianglelefteq \mathbb{R}^2 \\ \dim(H)=1}} \sum_{a\in M} \mathrm{dist}(a, H)^2$$

et déterminer D.

Exercice 3. Trouver la solution minimale des systèmes d'équations:

$$x_1 + x_2 = b_1\,, \qquad \begin{cases} x_1 = b_1\,, \\ x_1 = b_2\,, \\ x_1 = b_3\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 = b_1\,, \\ 0x_1 = b_2\,, \\ 7x_3 = b_3\,, \\ 0x_2 = b_4\,. \end{cases}$$

Exercice 4. Soit $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer que

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

Exercice 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 13/10 & 9/10 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1 \\ 13/10 & 9/10 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 1, 2$, calculer l'approximation A_k de rang k de A, vue dans le cours, ainsi que

$$||A - A_1||_F, \qquad ||A - A_1||_2, \qquad ||A - A_2||_F, \qquad ||A - A_2||_2.$$

Exercice 6.

a) Pour chaque matrice A, montrer que $\sigma_k \leq \frac{||A||_F}{\sqrt{k}}$, pour toutes les valeurs singulières $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

b) Pour $1 \leq k \leq r$, montrer qu'il existe une matrice B de rang plus petit ou égal a k telle que $||A - B||_2 \leq \frac{||A||_F}{\sqrt{k}}$.

c) Est-ce que la norme euclidienne du côté gauche de l'inégalité dans (b) peut être remplacée par la norme de Frobenius ?

Exercice 7. Montrer Lemme 4.3 dans la polycopié:

On considère le système suivant

$$\begin{array}{rcrcr} \mathbf{x}_1'(t) & = & a_{11}\mathbf{x}_1(t) & + \cdots + & a_{1n}\mathbf{x}_n(t) \\ \mathbf{x}_2'(t) & = & a_{21}\mathbf{x}_1(t) & + \cdots + & a_{2n}\mathbf{x}_n(t) \\ & \vdots & & & \\ \mathbf{x}_n'(t) & = & a_{n1}\mathbf{x}_1(t) & + \cdots + & a_{nn}\mathbf{x}_n(t) \end{array} \tag{1}$$

où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{X} = \{\mathbf{x} \colon \mathbf{x} \text{ est une solution du système } (1)\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Montrer que $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$.

Exercice 9. Soient $A, B, P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telles que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Montrer que $e^A = P^{-1}e^B P$.