**Algèbre linéaire avancée II**
printemps 2019

**Série 7**

**Exercice 1.** Montrer partie (3.5) de théorème 3.13: Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Si $U$ dénote un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\setminus\{0\}} R_A(x).$$

**Exercice 2.** Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Soit $K = \{l_1, \ldots, l_{n-k}\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ où $1 \leq l_1 < \cdots < l_{n-k} \leq n$ et soit $B \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ une sous-matrice symétrique de $A$ définie par $B_{ij} = A_{l_i l_j}$ (ainsi $K$ marque les lignes et les colonnes de $A$ qui apparaissent dans la matrice $B$.)

Soient $\mu_1 \geq ... \geq \mu_{n-k}$ les valeurs propres de $B$. Montrer que $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+k}$, pour $i = 1, \ldots, n-k$.

**Exercice 3.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ une matrice de rang $r$, et soient $P \in \mathbb{K}^{m\times m}$ et $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ des matrices unitaires telles que $A = PDQ$, avec $D \in \mathbb{R}^{m\times n}_{\geq 0}$ diagonale et $d_{i,i} \geq d_{i+1,i+1}$ pour $i = 1, \ldots, \min\{n-1, m-1\}$.

Montrer que les colonnes de $Q^*$ sont les vecteurs propres de $A^*A$, que celles de $P$ sont les vecteurs propres de $AA^*$, et que les coefficients positifs diagonaux de $D$ sont les valeurs singulières de $A$.

**Exercice 4.** Déterminer les valeurs singulières des matrices suivantes. Pour les matrices $A_3$ à $A_6$ donner aussi la décomposition en valeurs singulières (SVD).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5.**

1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ une matrice carrée inversible. Déterminer une décomposition SVD de $A^{-1}$.

2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ est une matrice carrée inversible, alors $|\det(A)|$ est égal au produit des valeurs singulières de $A$.

3. Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice carrée symétrique définie positive, alors ses valeurs singulières sont ses valeurs propres.

4. Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice carrée symétrique, alors ses valeurs singulières sont les valeurs absolues de ses valeurs propres non-nulles.

**Exercice 6.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec une decomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. La pseudoinverse de $A$ est défini comme $A^+ = Q^*D^+P^*$, où $D^+$ est la matrice défini dans la Définition 3.8. Montrer que $A^+$ satisfait les quatre conditions de Penrose:

1. $AA^+A = A$.

2. $A^+AA^+ = A^+$.

3. $(AA^+)^* = AA^+$.

4. $(A^+A)^* = A^+A$.

**Exercice 7.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse $A^+$. Montrer les propriétés suivantes de la matrice pseudoniverse:

1. $(A^+)^+ = A$.

2. $(A^+)^* = (A^*)^+$.

**Exercice 8.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse $A^+$. Montrer que la pseudoinverse satisfait les relations suivantes:

1. $A^+ = A^+(A^+)^*A^*$.

2. $A = AA^*(A^+)^*$.

3. $A^* = A^*AA^+$.

4. $A^+ = A^*(A^+)^*A^+$.

5. $A = (A^+)^*A^*A$.

6. $A^* = A^+AA^*$.

**Exercice 9.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse $A^+$. Montrer que en général on a

$$(AA^*)^+ = (A^*)^+ A^+ \,. \tag{1}$$

Donc utiliser (1) pour montrer

$$A^+ = A^*(AA^*)^+ = (A^*A)^+ A^* \,.$$

Indication: Utiliser les résultats de l'exercice 8.