
L'exercice peut être rendu aux assistants le mardi 16 avril avant la leçon d'exercice.

Étudiant(e) :

Salle :

Exercice 8 : *Cette question est notée sur 8 points.*

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Réservé au correcteur

Montrer le Théorème 3.19 : Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique et $f(x) = x^T A x$ la forme quadratique correspondante à A . Soit

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

une factorisation de A telle que $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est orthogonale et $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.
Pour $1 \leq \ell < n$ on a

$$\max_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x \perp u_1, \dots, x \perp u_\ell}} f(x) = \lambda_{\ell+1} = \min_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x \perp u_{\ell+2}, \dots, x \perp u_n}} f(x) \quad (1)$$

et $u_{\ell+1}$ est une solution optimale.