

---

L'exercice peut être rendu aux assistants le mardi 16 avril avant la leçon d'exercice.

---

Étudiant(e) :

Salle :

**Exercice 8 :** *Cette question est notée sur 8 points.*

0  1  2  3  4  5  6  7  8

*Réservé au correcteur*

Montrer le Théorème 3.19 : Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice symétrique et  $f(x) = x^T A x$  la forme quadratique correspondante à  $A$ . Soit

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

une factorisation de  $A$  telle que  $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est orthogonale et  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Pour  $1 \leq \ell < n$  on a

$$\max_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x \perp u_1, \dots, x \perp u_\ell}} f(x) = \lambda_{\ell+1} = \min_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x \perp u_{\ell+2}, \dots, x \perp u_n}} f(x) \quad (1)$$

et  $u_{\ell+1}$  est une solution optimale.