L'exercice peut être rendu aux assistants le mardi 9 avril avant la leçon d'exercice.

Étudiant(e) :

Salle :

Question 7 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 *Réservé au correcteur*

1. Pour les matrices $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n \times d}$, soit p_i la i-ème colonne de P, et q_i la i-ème ligne de Q. Montrer que
$$PQ = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ une matrice avec décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$, avec r valeurs singulières $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, $r \leq d$. Montrer qu'on a
$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i.$$

3. Conclure que l'on peut représenter A comme
$$A = URV, \qquad U \in \mathbb{R}^{m \times r},\ R \in \mathbb{R}^{r \times r},\ V \in \mathbb{R}^{r \times d},$$
où la matrice U est composée des premières r colonnes de P, V est composée des premières r lignes de Q, et R est une matrice diagonale avec les r valeurs singulières sur sa diagonale.