Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 5 - Corrigé

Exercice 1. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire ordinaire dans $\mathbb{R}^n$. Trouver une factorisation $A = A'R$ du Corollaire 1.18 de la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}.$$

Solution. *Nous montrons la partie 2., ce qui nous donne la partie 1. Nous utilisons le procédé de Gram-Schmidt et nous montrons le théorème par induction.*

Soient $v_1,\dots,v_{n+1}$ les colonnes de $A = A_2$ et $u_1,\dots,u_{n+1}$ les vecteurs obtenus par Gram-Schmidt. Si $i \geq j+2$, on a $v_i \perp v_j$. L'orthogonalisation de Gram-Schmidt peut donc être simplifée:

$$u_{j+1} = v_{j+1} - \frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} u_j.$$

Nous montrons par recurrence que

$$(u_j)_i = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j}}{j} & i \leq j \\ 1 & i = j+1 \\ 0 & i > j+1 \end{cases}.$$

Pour $j = 1$, c'est vrai. Supposons que c'est vrai pour un $j \geq 1$. On obtient $\|u_j\|^2 = \frac{j+1}{j}$ et donc le coefficient de Fourier

$$\frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} = j/(j+1).$$

On a

$$
\begin{aligned}
(u_{j+1})_i &= \left(v_{j+1} - \frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} u_j\right)_i \\
&= \left(v_{j+1} - \frac{j}{j+1} u_j\right)_i \\
&= \begin{cases} 0 - \frac{j}{j+1}\frac{(-1)^{j+i}}{j} & i \leq j \\ 1 - \frac{j}{j+1} & i = j+1 \\ 1 - 0 & i = j+2 \\ 0 & i > j+2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(-1)^{(j+1)+i}}{j+1} & i \leq j+1 \\ 1 & i = j+2 \\ 0 & i > j+2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

La matrice R'' est

$$
R''_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \frac{j}{j+1} & i = j-1 \\ 0 & \textit{autrement} \end{cases}.
$$

Nous avons $A = A''R''$ comme désiré. Afin de normaliser les colonnes de A'', nous multiplions la j-ième colonne u_j de A'' par $\|u_j\|^{-1}$ et la j-ième ligne de R'' par $\|u_j\|$. Ceci nous donne

$$
A''R'' = \underbrace{A'' \begin{pmatrix} \|u_1\|^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \|u_n\|^{-1} \end{pmatrix}}_{=:A'} \underbrace{\begin{pmatrix} \|u_1\| & & \\ & \ddots & \\ & & \|u_n\| \end{pmatrix} R''}_{R'}.
$$

Finalement, on a

$$
A'_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j} \left(j(j+1)\right)^{-1/2} & i \leq j \\ \sqrt{\frac{j}{j+1}} & i = j+1 \\ 0 & \textit{autrement} \end{cases}
$$

et

$$
R'_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{j-1}{j}} & i = j-1 \\ \sqrt{\frac{j+1}{j}} & i = j \\ 0 & \textit{autrement} \end{cases}.
$$

Pour la partie 1., ceci implique que

$$
A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/6} & \sqrt{1/12} \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/6} & -\sqrt{1/12} \\ 0 & \sqrt{2/3} & \sqrt{1/12} \\ 0 & 0 & \sqrt{3/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & \sqrt{2/3} \\ 0 & 0 & \sqrt{4/3} \end{pmatrix}.
$$

Exercice 2. Soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la distance entre u et $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$? La distance entre u et V est $dist(u, V) = \min_{v \in V} \|u - v\|$, oú la norme $||\cdot||$ est par raport au produit scalaire ordinaire.

Solution. *Soit* $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. *La distance entre un vecteur* u *et un sous-espace* V *est par définition* $\min_{v \in V} \|u - v\|$. *En posant*

$$A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \{Ax |\ x \in \mathbb{R}^3\}$, *donc* $min_{v \in V} \|u - v\| = \min_{x \in \mathbb{R}^3} \|u - Ax\|$. *On sait du cours que la solution* $x^\star$ *du système* $A^T Ax = A^T u$ *est un vecteur tel que* $\|u - Ax\|$ *est minimisée. Donc il suffit de résoudre ce sytème et alors* $\|Ax^\star - u\|$ *est la réponse voulue.*

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^T u = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \qquad (A^T A)^{-1} A^T u = x^\star = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\|Ax^\star - u\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2$$

est la réponse voulue.

Preuve alternative: On applique le procédé de Gram-Schmidt sur v_1, v_2, v_3, u *et obtenir une base orthogonale* v_1', v_2', v_3', u'. *Alors,* $u = u' + x$, *où* $x \in \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ *et* $\|u'\| = dist(u, V)$ *avec le théorème 2.20.*

Exercice 3. 1. Soient V un espace vectoriel de dimension finie, $f : V \to K$ une forme linéaire, et B, B' des bases de V. Soit

$$f(x) = a^\top [x]_B,$$

avec $a \in K^n$. Décrire $f(x)$ en termes de $P_{B'B}$ et $[x]_{B'}$.

2. Soient V un espace vectoriel de dimension finie, $f : V \times V \to K$ une forme bilinéaire, et B, B' des bases de V. Soit

$$f(x, y) = [x]_B^\top A_B^f [y]_B.$$

Décrire $f(x, y)$ en termes de $P_{B'B}$, $[x]_{B'}$ et $[y]_{B'}$. *Rappel*: La matrice $P_{B'B}$ est la matrice de passage qui transforme un vecteur de la base B' dans la base B.

Solution. *1. Les coordonnées du vecteur x dans la base B sont notées par $[x]_B$. On peut passer des coordonnées x dans B' aux coordonnées dans B en utilisant $P_{B'B}[x]_{B'} = [x]_B$. Il suffit alors de remplacer cela dans l'expression de la fonction f,*

$$f(x) = a^\top P_{B'B}[x]_{B'}.$$

2. De même, $[x]_B = P_{B'B}[x]_{B'}$ et $[y]_B = P_{B'B}[y]_{B'}$, alors

$$f(x, y) = [x]^\top A_B^f [y]_B = (P_{B'B}[x]_{B'})^\top A_B^f P_{B'B}[y]_{B'} = [x]_{B'}^\top P_{B'B}^\top A_B^f P_{B'B}[y]_{B'}.$$

Exercice 4. Soient v_1 et $v_2 \in \mathbb{Z}_2^4$, donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la forme bilinéaire standard $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$. Trouver une base de $\operatorname{span}\{v_1, v_2\}^\perp$. Est-ce que
$\mathbb{Z}_2^4 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\} \oplus \operatorname{span}\{v_1, v_2\}^\perp$?

Solution. *Soit $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$. On cherche une base de $U^\perp = \{v \in V \mid \langle x, u \rangle = 0, \forall u \in U\}$. On pose $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_2^4$ et on résoud*

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \text{ et } \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

ce qui nous donne $x_1 + x_2 = 0$ et $x_2 + x_3 = 0$, c'est-à-dire $x_1 = x_3 = -x_2$. On obtient donc deux vecteurs de base pour $U^\perp$,

$$U^\perp = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On voit que $U \cap U^\perp = \{0\}$ et comme $\dim(\mathbb{Z}_2^4) = 4$, on a que $\mathbb{Z}_2^4 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\} \oplus \operatorname{span}\{v_1, v_2\}^\perp$.

Exercice 5. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire. Montrer que $V = W \oplus W^{\perp}$ est satisfait pour tout sous-espace $W \subseteq V$. Conclure que $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$.

Solution. *En utilisant Gram-Schmidt, on trouve une base orthonormale $v_1, \dots, v_n$ de W et une base orthonormale $u_1, \dots, u_m$ de $W^{\perp}$. Soit $v = \sum_i \alpha_i v_i \in W \cap W^{\perp}$. Comme $v \in W^{\perp}$, on a*

$$0 = \langle v, v_i \rangle = \alpha_i \|v_i\|^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0$$

pour tout i, donc $v = 0$ et $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

Il reste montrer que $W, W^{\perp}$ engendrent V. Soit $w \in V$. On définit $w' = \sum_i \frac{\langle w, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$, et $w'' = w - w'$. Clairement, $w' \in W$. De plus,

$$\langle w'', v_i \rangle = \langle w - w', v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle - \langle w', v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle - \left\langle \frac{\langle w, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i, v_i \right\rangle = 0$$

pour tout i, montrant que $w'' \in W^{\perp}$. Donc, $V = W \oplus W^{\perp}$. Mais alors $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m$ est une base de V, et donc

$$\dim V = n + m = \dim W + \dim W^{\perp}.$$

Exercice 6. Démontrer la proposition 2.29: Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et soit B une base de V. Une forme sesquilinéaire f est une forme hermitienne si et seulement si A_B^f est hermitienne. (On appelle une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitienne si $A = \overline{A^T}$.)

Solution. *Soit f une forme sesquilinéaire et soit A_B^f sa matrice correspondante, pour une base B.*

"⇒": *Supposons que f est une forme hermitienne, alors $f(b_i, b_j) = \overline{f(b_j, b_i)}$ pour tous vecteurs b_i, b_j de la base. Donc,*

$$\begin{aligned} & [b_i]_B^T A_B^f \overline{[b_j]_B} = \overline{[b_j]_B^T A_B^f \overline{[b_i]_B}} \\ \Rightarrow \quad & (A_B^f)_{ij} = \overline{(A_B^f)_{ji}} \\ \Rightarrow \quad & A_B^f = \overline{(A_B^f)^T}. \end{aligned}$$

"⇐": *La seule chose qu'il nous reste à montrer est que $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$ $\forall x, y \in \mathbb{C}$. Soient $x, y \in \mathbb{C}$*

$$\begin{aligned} f(x, y) &= [x]_B^T A_B^f \overline{[y]_B} \\ &= \overline{[y]_B}^T (A_B^f)^T [x]_B \\ &= \overline{\overline{\overline{[y]_B}^T (A_B^f)^T [x]_B}} \\ &= \overline{[y]_B^T \overline{(A_B^f)^T} \overline{[x]_B}} \\ &= \overline{[y]_B^T A_B^f \overline{[x]_B}} \\ &= \overline{f(y, x)} \end{aligned}$$

Ainsi, f est une forme hermitienne.

Exercice 7. Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ tel que $\dim(V) = 3$ et $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de V. Avec les matrices $A_i \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ décrites en base et les applications $f_i(x, y) = [x]_B^T A_i \overline{[y]_B}$, cocher ce qui s'applique :

	A_1	A_2	A_3
forme sesquilinéaire			
forme hermitienne			

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1+2\cdot i & 3-i \\ 1-2\cdot i & 0 & 2-i \\ 3-i & 2+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. *En utilisant les propriétés de l'addition et multiplication par un scalaire des matrices, on voit que les trois applications sont sesquilinaires. Après, en utilisant l'exercise 6 (prop. 2.29), on déduit que f_1 est la seule forme hermitienne, parce que A_1 est la seule matrice hermitienne.*

	A_1	A_2	A_3
forme sesquilinaire	*oui*	*oui*	*oui*
produit hermitien	*oui*	*no*	*no*

Exercice 8. Modifier l'algorithme 2.1 afin qu'il calcule une matrice diagonale congruente complexe par rapport à une matrice hermitienne $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Solution. *On se rapelle que deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sont* congruentes complexes *s'il existe une matrice inversible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle que $A = P^T \cdot B \cdot \overline{P}$. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne. On modifie l'algorithme 2.1 comme suit :*

*Pour $1 \leq i \leq n$, la i-*me itration *est comme suit.*

- *S'il existe un index $j \geq i$ tel que $b_{jj} \neq 0$ soit $j \geq i$ le plus petit tel indexe et échange la i-ème ligne et la j-ème ligne et après la i-ème colonne et la j-ème colonne.*
- *Si $b_{ii} = 0$, soit $j \in \{i + 1, \ldots, n\}$ tel que $b_{ij} \neq 0$. Si un tel indexe n'existe pas on procède à la $i + 1$-ème itération. On additionne la ligne j sur la ligne i et on additionne la colonne j sur la colonne i. Étant donné que* $\mathrm{car}(K) \neq 2$, *on a alors maintenant $b_{ii} = 2b_{i,j} \neq 0$.*
- *Pour chaque $j \in \{i + 1, \ldots, n\}$: On additionne $-\overline{b_{ij}}/b_{ii}$ fois la i-ème ligne sur la j-ème ligne et on additionne $-b_{ij}/b_{ii}$ fois la i-ème colonne sur la j-ème colonne.*