Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 4 - Corrigé

Exercice 1. Soient V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonaux.

a) Montrer le théorème de Pythagore généralisé : $\|v_1 + \ldots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \ldots + \|v_n\|^2$.

b) Montrer que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble libre si pour tout i, $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$.

Solution. *Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle . \rangle$. Soient $v_1, \ldots, v_n \in V$ des vecteurs deux à deux orthogonaux (c'est-à-dire $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $1 \leq i \neq j \leq n$).*

a) On va montrer que $\|v_1 + \ldots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \ldots + \|v_n\|^2$. Par définition,

$$\begin{aligned} \|v_1 + \ldots + v_n\|^2 &= \langle v_1 + \ldots + v_n, v_1 + \ldots + v_n \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i=j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2 \end{aligned}$$

où dans la 3ème ligne, on a utilisé le fait que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

b) Supposons que l'ensemble $\{v_1 \ldots, v_n\}$ ne soit pas libre. Alors il existe des coefficients $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que $c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = 0$. Soit $c_i \neq 0$ pour un certain $i \in \{1, \cdots, n\}$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, v_i \rangle \\ &= \langle c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n, v_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \langle v_j, v_i \rangle \\ &= c_i \langle v_i, v_i \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

parce que $c_i \neq 0$ et $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$; donc on arrive à une contradiction. Alors $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble libre.

Exercice 2. Soit V un espace euclidien de dimension finie avec une base orthonormale $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Montrer que pour tout $v \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

2. Pour $f, g \in V$, montrer l'*identité de Parseval* :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f, v_i \rangle \langle v_i, g \rangle .$$

Solution. *1. Soit $v \in V$ avec $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$ pour quelques $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$\begin{aligned} \langle v, v_k \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_k \rangle \\ &= \alpha_k. \end{aligned}$$

Ca implique que

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k \rangle v_k.$$

2. On utilize 1.*:*

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle f, v_k \rangle v_k, \sum_{k=1}^{n} \langle g, v_k \rangle v_k \right\rangle && (1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\langle \langle f, v_k \rangle v_k, \sum_{i=1}^{n} \langle g, v_i \rangle v_i \right\rangle && (2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle \langle f, v_k \rangle v_k, \langle g, v_i \rangle v_i \rangle && (3) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle \langle f, v_k \rangle v_k, \langle g, v_k \rangle v_k \rangle && (4) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle f, v_k \rangle \langle g, v_k \rangle . && (5) \end{aligned}$$

Dans (2) et (3), nous avons utilizer que une forme bilinéaire est linéaire dans une élément. Dans (4) et (5), nous avons utilizer orthonormalité.

Exercice 3. Soient V un K-espace vectoriel avec une base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique, et $P \in K^{n \times n}$ inversible telle que $P^T A_B^{\langle \cdot,\cdot \rangle} P$ est une matrice diagonale.

Montrer que les elements $u_k \in V$ tels que $[u_k]_B = P_k$, où P_k est la k-ième colonne de P, forment une base orthogonale de V.

Solution. *Soient $D = P^T A_B^{\langle \cdot,\cdot \rangle} P$ une matrice diagonale, et $u_k \in V$ tels que $[u_k]_B = P_k$, c-à-d $u_k = \sum_{i=1}^n P_{i,k} v_i$. Alors,*

$$\begin{aligned}
\langle u_i, u_j \rangle &= [u_i]_B^T A_B^{\langle \cdot,\cdot \rangle} [u_j]_B \\
&= (P_i)^T A_B^{\langle \cdot,\cdot \rangle} P_j \\
&= (P_i)^T (A_B^{\langle \cdot,\cdot \rangle} P)_j \\
&= D_{i,j},
\end{aligned}$$

où $D_{i,j}$ est égale à zéro si $i \neq j$. Alors, les vecteurs u_k sont orthogonaux et linéairement indépendants, parce que P est inversible.

Exercice 4. Soit K un corps de caractéristique 2 et soit V un espace vectoriel sur K de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique. Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Soit $\dim(V) = 2$. Montrer que V ne possède pas de base orthogonale si et seulement s'il existe une base B de V telle que $A_B^{\langle . \rangle} = C$.

b) Soit $\dim(V) = 3$. Supposons que

$$A_B^{\langle . \rangle} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que V possède une base orthogonale si et seulement si $a \neq 0$.

Renseignement: Si $a \neq 0$, multiplier la 3-ème ligne (resp. colonne) par a. Ensuite, ajouter la 2-ème et 3-ème lignes (colonnes) dans la premire ligne (colonne) pour obtenir

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis continuer comme dans notre algorithme.

c) (Difficile / optionnel) Montrer le théorème suivant. V possède une base orthogonale si et seulement s'il existe une base B de V telle que

$$A_B^{\langle\cdot\rangle} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_k & & & \\ & & & & C & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & C \end{pmatrix}$$

où au moins un des coefficients $d_i \neq 0$.

Solution. *a) Soit $v_1 = (a,b)^T$ et $v_2 = (c,d)^T$ deux vecteurs non nuls tels que*

$$v_1^T C v_2 = (a,b)C\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ad + bc = 0.$$

Si un des coefficients est nul, par exemple (et sans perte de généralité) si $a = 0$:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad d \neq 0,$$

où la 1-ère et 3-ère implications decoulent de l'hypothèse que les vecteurs sont non nuls. Par conséquant, les vecteurs son linéairement dépendants. D'autre part, si tous les coefficients sont non nuls, on sait que $ad = bc$ parce que le corps est de caractéristique 2. Or,

$$ad = bc \Rightarrow ab^{-1} = cd^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} ab^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} cd^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = bd^{-1}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

ce qui montre que les vecteurs sont de nouveau linéairement dépendants. On conclut que si $v_1^T C v_2 = 0$ alors les vecteurs ne sont pas libres.

Pour deux bases quelconques B, D, on a $A_D^{\langle\cdot\rangle} = P_{DB}^T A_B^{\langle\cdot\rangle} P_{DB}$, ce qui veut dire que $A_D^{\langle\cdot\rangle}$ and $A_B^{\langle\cdot\rangle}$ sont équivalentes. Or, si $D = \{d_1, d_2\}$ est une base orthogonale, et $A_B^{\langle\cdot\rangle} = C$, on a

$$0 = [d_1]_D^T A_D^{\langle\cdot\rangle}[d_2]_D = [d_1]_B^T A_B^{\langle\cdot\rangle}[d_2]_B = [d_1]_B^T C [d_2]_B.$$

Ce qui implique que d_1 et d_2 ne sont pas libres, une contradiction. On a bien montré que

$$A_B^{\langle\cdot\rangle} = C \text{ pour une base } B \quad \Rightarrow \quad \nexists \text{ une base orthogonale.}$$

Pour l'autre direction, supposons qu'il n'existe pas de base orthogonale. Alors, pour une base quelconque $B = \{b_1, b_2\}$, on sait que

$$0 \neq \langle b_1, b_2\rangle = (A_B^{\langle\cdot\rangle})_{21} = (A_B^{\langle\cdot\rangle})_{12}.$$

Si $(A_B^{\langle\cdot\rangle})_{11}$ ou $(A_B^{\langle\cdot\rangle})_{22}$ est non nul, on pourrait diagonaliser la matrice $A_B^{\langle\cdot\rangle}$, avec l'algorithme 1.1, ce qui veut dire qu'il y a une base orthogonale (voir exercice 3). On conclut que $(A_B^{\langle\cdot\rangle})_{11} = (A_B^{\langle\cdot\rangle})_{22} = 0$, et $A_B^{\langle\cdot\rangle} = C$.

b) *Si $a \neq 0$, on utilise le renseignement pour diagonaliser $A_B^{\langle\cdot\rangle}$ et on obtient la matrice diagonale*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Comme vu dans l'exercice 3, cela implique qu'il existe une base orthogonale.

Supposons donc que $a = 0$:

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2yz = 0 \qquad \Rightarrow \left(P^T A_B^{\langle\cdot\rangle} P\right)_{jj} = 0 \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

Alors la matrice diagonale $P^T A_B^{\langle\cdot\rangle} P$ est la matrice nulle. Mais ceci est une contradiction parce que

$$\mathrm{rank}(\mathbf{0}) = 0 \neq 2 = \mathrm{rank}(A_B^{\langle\cdot\rangle}) = \mathrm{rank}(P^T A_B^{\langle\cdot\rangle} P)$$

pour toute matrice inversible P. Donc $A_B^{\langle\cdot\rangle}$ n'est pas diagonalisable, et grâce à l'exercice 4, on sait que V n'a pas de base orthogonale.

c) *Suppons que $d_j = 0 \ \forall \ j \in \{1, \ldots, k\}$. Un calcul similaire à celui de la partie b) montre que il y pas une base orthogonale.*

Suppons donc que $\exists \ d_j \neq 0$. Sans perte de généralité on prendre $j = 1$. Soit $a = d_1 \neq 0$. On montre comment on peut diagonalizer le premier sous-matrice C. Soit $A = A_B^{\langle\cdot\rangle}$, et soit C la sous-matrice de A définie par A_{ij}, $i, j \in \{k+1, k+2\}$. Procéder comme suit:

- *Multiplier la colonne $k+1$ et la ligne $k+1$ par a.*
- *Ajouter un fois les colonnes $k+1$ et $k+2$ à la colonne 1. Comme $A_{1,k+1} = A_{1,k+2} = 0$, A_{11} ne change pas.*
- *Ajouter un fois les lignes $k+1$ et $k+2$ à la ligne 1. Comme on ajoute $A_{1,k+1} + A_{1,k+2} = 2a = 0$ à A_{11}, cette entrée reste la même.*
- *Ajouter un fois la colonne* 1 *aux colonnes $k+1$ et $k+2$. La sous-matrice C devient la matrice diagonale $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, et les entrées $A_{1,k+1}$ et $A_{1,k+2}$ redeviennent* 0.
- *Ajouter un fois la ligne 1 aux lignes $k+1$ et $k+2$. Comme $A_{1,k+1} = A_{1,k+2} = 0$, on ne modifie plus la matrice C, mais $A_{k+1,1}$ et $A_{k+2,1}$ redeviennent 0.*

En résumé, cette procédure transforme C en matrice diagonale, et ne produit aucun autre changement. Donc, on peut continuer de cette sorte avec les autres sous-matrices C le long de la diagonale, jusqu'à ce que A devienne une matrice diagonale.

Comme toutes les opérations réalisées sur les lignes et colonnes sont symétriques, ceci peut être accompli par une matrice $P^T AP$. Et par l'exercice 4, si A est diagonalisable alors il existe une base orthogonale.

Exercice 5. Modifier l'algorithme 1.1 tel qu'il soit aussi correct pour des corps de caractéristique 2. Soit l'algorithme découvre que la matrice symétrique $A \in K^{n\times n}$ n'est pas congruente à une matrice diagonale soit l'algorithme calcule une matrice diagonale congruente à A.

Solution. *Si $\operatorname{car}(K) = 2$, le seul point où notre algorithme risque d'échouer est le suivant : Dans la i-ème iteration, on a que $A_{jj} = 0$ pour tout $j \geq i$. Si la colonne i a des zéros partout (et donc pareillement pour la ligne i), continuer avec $i + 1$. Autrement, échanger les colonnes (et lignes) $i + 1$ et k, où $k = \min\{j : \ A_{ij} \neq 0\}$. Moyenant une multiplication de la ligne et colonne i par un scalaire adéquat, notre matrice a la forme suivante :*

$$\begin{pmatrix}
d_1 \\
& d_2 \\
& & \ddots \\
& & & d_{i-1} \\
& & & & 0 & 1 & b_{i,i+2} & \dots & b_{i,n} \\
& & & & 1 & 0 & b_{i+1,i+2} \\
& & & & b_{i+2,i} & b_{i+2,i+1} & b_{i+2,i+2} & & \vdots \\
& & & & \vdots & & & \ddots \\
& & & & b_{n,i} & & \dots & & b_{n,n}
\end{pmatrix}$$

Pour $i + 1 < j \leq n$, ajouter $-b_{ij}$ fois la colonne $(i + 1)$ à toute colonne j telle que $b_{ij} \neq 0$, et puis ajouter $-b_{i+1,j}$ fois la colonne i à toute colonne j telle que $b_{i+1,j} \neq 0$. Faire le même avec les lignes. On obtient la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix}
d_1 \\
& d_2 \\
& & \ddots \\
& & & d_{i-1} \\
& & & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
& & & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
& & & & 0 & 0 & b_{i+2,i+2} & \dots & b_{i+2,n} \\
& & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& & & & 0 & 0 & b_{n,i+2} & \dots & b_{n,n}
\end{pmatrix}$$

Continuer de la même sorte avec la $(i + 2)$-ème iteration, jusqu'à la fin. On finit avec une matrice qui consiste en entrées le long de la diagonale, et copies de la matrice C également le long de la diagonale. S'il y a une entrée non nulle sur la diagonale, on *peut éliminer toutes les matrices C comme dans la partie c) de l'exercice 4. Autrement, arranger simplement touts les blocs C dans le côté inferieur de la diagonale, via des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes. Utiliser le resultat de l'exercice 4 pour conclure : soit trouver la base orthogonale correspondante, soit conclure qu'il n'existe pas de base orthogonale.*

Exercice 6. Comment peut-on déterminer si un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique possède une base orthogonale? Décrire très brièvement une méthode.

Solution. *Pour une base quelconque B de V, considérer la matrice $A_B^{\langle\cdot\rangle}$ et effectuer sur elle l'algorithme de l'exercice 5. En fonction du résultat, on sait s'il existe ou pas de base orthogonale.*

Exercice 7. Soient V un espace vectoriel de dimension n sur un corps K muni d'une forme bilinéaire symétrique $\langle\cdot,\cdot\rangle$, B une base, et $A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ la matrice correspondante. L'espace de nullité est défini par $V_0 := \{v \in V \mid \langle v, x\rangle = 0 \ \forall x \in V\}$, et $f : K^n \to K^n$ est définie par $f(x) = A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} x$.

Montrer que $\dim(\ker(f)) = \dim(V_0)$.

Solution. *On montre que $x \in V_0$ si et seulement si $[x]_B \in \ker(f)$. Parce que $x \mapsto [x]_B$ est une isomorphisme d'espaces vectoriels V et K^n, ca finie le preuve.*

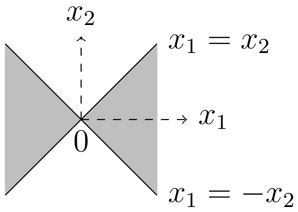
$$\begin{aligned}
& & x \in V_0 & \\
\Leftrightarrow & & \langle v, x\rangle = 0 & \quad \forall\, v \in V \\
\Leftrightarrow & & [v]_B^{\intercal} A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle}[x]_B = 0 & \quad \forall\, v \in V \\
\Leftrightarrow & & e_i^{\intercal} A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle}[x]_B = 0 & \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\} \\
\Leftrightarrow & & (A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle}[x]_B)_i = 0 & \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\} \\
\Leftrightarrow & & A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle}[x]_B = 0 & \\
\Leftrightarrow & & [x]_B \in \ker(f). &
\end{aligned}$$

Exercice 8. Soit $V = \mathbb{R}^2$ avec la forme bilinéaire symétrique

$$\langle x, y\rangle = x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y.$$

Dessiner l'ensemble $V_+ = \{v \in V :\ \langle v, v\rangle > 0\} \cup \{0\}$. Est-ce que V_+ est un sous-espace de V?

Solution. *L'ensemble* V_+ *est l'ensemble* $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1| > |x_2|\} \cup \{0\}$*, dessiné en grise.*



Ce n'est pas un sous-espace, car $(2,1), (-2,1) \in V_+$*, mais* $(2,1) + (-2,1) = (0,2) \notin V_+$.