Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 6

Exercice 1. Soit V un espace hermitien. Montrer l'ingalit de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\| \qquad \forall \, u, v \in V.$$

Exercice 2. Montrer qu'un espace hermitien de dimension fini possède une base B tel que $\langle x, y\rangle = [x]_B^T \cdot \overline{[y]_B}$, où $\cdot$ est le produit hermitien standard.

Exercice 3. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que toutes les valeurs propres de la matrice $A + B$ sont aussi strictement positives.

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $A = B^T B$.

Exercice 5. Pour chaque forme suivante Q, décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique. Montrer que A est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont non négatifs, c'est-à-dire $\det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
Rappel: Soit $K = \{l_1, \ldots, l_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ où $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_k \leq n$. La matrice $B_K \in \mathbb{R}^{k\times k}$ est la matrice $(B_K)_{ij} = A_{l_i l_j}, 1 \leq i, j \leq k$.

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique.

a) Montrer que A est définie négative, si et seulement si $(-1)^k \det(B_k) > 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Montrer que A est semi-définie négative, si et seulement si $(-1)^{|K|} \det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Exercice 8. Une matrice A lequelle est réelle symétrique, différente de la matrice zéro, telle que toute composante sur la diagonale est zéro est indéfinie. C'est-à-dire, il existe deux vecteurs $u \neq v$ tels que $u^T Au < 0 < v^T Av$.