Prof. Friedrich Eisenbrand 20 mars 2019

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 5

Exercice 1. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire ordinaire dans $\mathbb{R}^n$. Trouver une factorisation $A = A'R$ du Corollaire 1.18 de la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}.$$

Exercice 2. Soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la distance entre u et $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$? La distance entre u et V est $dist(u, V) = \min_{v \in V} \|u - v\|$, oú la norme $||\cdot||$ est par raport au produit scalaire ordinaire.

Exercice 3.

1. Soient V un espace vectoriel de dimension finie, $f : V \to K$ une forme linéaire, et B, B' des bases de V. Soit

$$f(x) = a^\top [x]_B,$$

avec $a \in K^n$. Décrire $f(x)$ en termes de $P_{B'B}$ et $[x]_{B'}$.

2. Soient V un espace vectoriel de dimension finie, $f : V \times V \to K$ une forme bilinéaire, et B, B' des bases de V. Soit

$$f(x, y) = [x]_B^\top A_B^f [y]_B.$$

Décrire $f(x, y)$ en termes de $P_{B'B}$, $[x]_{B'}$ et $[y]_{B'}$. *Rappel*: La matrice $P_{B'B}$ est la matrice de passage qui transforme un vecteur de la base B' dans la base B.

Exercice 4. Soient v_1 et $v_2 \in \mathbb{Z}_2^4$, donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la forme bilinéaire standard $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$. Trouver une base de $\operatorname{span}\{v_1, v_2\}^\perp$. Est-ce que
$\mathbb{Z}_2^4 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\} \oplus \operatorname{span}\{v_1, v_2\}^\perp$?

Exercice 5. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire. Montrer que $V = W \oplus W^\perp$ est satisfait pour tout sous-espace $W \subseteq V$. Conclure que $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.

Exercice 6. Démontrer la proposition 2.29: Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et soit B une base de V. Une forme sesquilinéaire f est une forme hermitienne si et seulement si A_B^f est hermitienne. (On appelle une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitienne si $A = \overline{A^T}$.)

Exercice 7. Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ tel que $\dim(V) = 3$ et $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de V. Avec les matrices $A_i \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ décrites en base et les applications $f_i(x, y) = [x]_B^T A_i \overline{[y]_B}$, cocher ce qui s'applique :

	A_1	A_2	A_3
forme sesquilinéaire			
forme hermitienne			

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1+2\cdot i & 3-i \\ 1-2\cdot i & 0 & 2-i \\ 3-i & 2+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Modifier l'algorithme 2.1 afin qu'il calcule une matrice diagonale congruente complexe par rapport à une matrice hermitienne $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$