
Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 4

Exercice 1. Soient V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonaux.

- a) Montrer le théorème de Pythagore généralisé : $\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2$.
- b) Montrer que $\{v_1, \dots, v_n\}$ est un ensemble libre si pour tout i , $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$.

Exercice 2. Soit V un espace euclidien de dimension finie avec une base orthonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Montrer que pour tout $v \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i.$$

2. Pour $f, g \in V$, montrer l'*identité de Parseval* :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n \langle f, v_i \rangle \langle v_i, g \rangle.$$

Exercice 3. Soient V un K -espace vectoriel avec une base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique, et $P \in K^{n \times n}$ inversible telle que $P^T A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} P$ est une matrice diagonale.

Montrer que les éléments $u_k \in V$ tels que $[u_k]_B = P_k$, où P_k est la k -ième colonne de P , forment une base orthogonale de V .

Exercice 4. Soit K un corps de caractéristique 2 et soit V un espace vectoriel sur K de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique. Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K muni d'une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$, B une base, et $A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ la matrice correspondante. L'espace de nullité est défini par $V_0 := \{v \in V \mid \langle v, x \rangle = 0 \ \forall x \in V\}$, et $f : K^n \rightarrow K^n$ est définie par $f(x) = A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} x$.

Montrer que $\dim(\ker(f)) = \dim(V_0)$.

Exercice 8. Soit $V = \mathbb{R}^2$ avec la forme bilinéaire symétrique

$$\langle x, y \rangle = x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y.$$

Dessiner l'ensemble $V_+ = \{v \in V : \langle v, v \rangle > 0\} \cup \{0\}$. Est-ce que V_+ est un sous-espace de V ?