Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 3 - Corrigé

Exercice 1. Soit V de dimension finie et B une base de V. Montrer que deux formes bilinéaires $f, g : V \times V \to K$ sont différentes si et seulement si $A_B^f \neq A_B^g$.

Solution. *Soit n la dimension de V et $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Les matrices A_B^f et A_B^g sont telles que*

$$(A_B^f)_{ij} = f(v_i, v_j) \quad \text{et} \quad (A_B^g)_{ij} = g(v_i, v_j)$$

et, de plus, pour chaque $x, y \in V$

$$f(x, y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B \quad \text{et} \quad g(x, y) = [x]_B^T A_B^g [y]_B.$$

Or, si $A_B^f = A_B^g$, pour chaque $x, y \in V$,

$$f(x, y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B = [x]_B^T A_B^g [y]_B = g(x, y),$$

donc les deux formes bilinéaires sont les mêmes. Si $A_b^f \neq A_B^g$, il existe $1 \leq i, j, \leq n$ où $(A_B^f)_{ij} \neq (A_B^g)_{ij}$. Alors

$$f(v_i, v_j) = (A_B^f)_{ij} \neq (A_B^g)_{ij} = g(v_i, v_j),$$

donc les deux formes bilinéaires sont différentes. On conclut que les deux formes bilinéaires f et g sont différentes si et seulement si $A_B^f \neq A_B^g$.

Exercice 2. Soit V de dimension finie et B une base de V. Une forme bilinéaire $f : V \times V \to K$ est symétrique si et seulement si A_B^f est symétrique.

Solution. *Soit n la dimension de V et $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. A_B^f est telle que $(A_B^f)_{ij} = f(v_i, v_j)$ et pour chaques $x, y \in V$, $f(x, y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B$. Or, si A_B^f est symétrique, pour chaques $x, y \in V$,*

$$f(x, y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B = [x]_B^T (A_B^f)^T [y]_B = \left([y]_B^T A_B^f [x]_B\right)^T = (f(y, x))^T = f(y, x),$$

donc f est symétrique. Si A_b^f n'est pas symétrique, il existe $1 \leq i, j, \leq n$ où $(A_B^f)_{ij} \neq (A_B^f)_{ji}$ et

$$f(v_i, v_j) = (A_B^f)_{ij} \neq (A_B^f)_{ji} = f(v_j, v_i),$$

donc f n'est pas symétrique. On conclut que f est symétrique si et seulement si A_B^f est symétrique.

Exercice 3. Montrer que $\cong$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $K^{n\times n}$.

Solution. *Pour montrer que $\cong$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $K^{n\times n}$, il suffit de montrer que la relation est*

1. *réflexive: $A \cong A$.*
2. *symétrique: $A \cong B \Rightarrow B \cong A$.*
3. *transitive: $A \cong B$ et $B \cong C \Rightarrow A \cong C$.*

1. *Réflexivité. On a que*
$$A = I^T A I\,,$$
où I est la matrice identité dans l'ensemble des matrices $K^{n\times n}$. Donc $A \cong A$.
2. *Symétrie. Si $A \cong B$, $\exists\, P \in K^{n\times n}$ inversible tel que*
$$A = P^T B P\,,$$
donc
$$B = P^{-T} A P^{-1}\,,$$
et $B \cong A$.
3. *Transitivité. Soit $A \cong B$ et $B \cong C$. Donc $\exists\, P, Q \in K^{n\times n}$ inversibles tels que*
$$A = P^T B P \quad \text{et} \quad B = Q^T C Q\,.$$
Donc on a
$$A = P^T Q^T C Q P = (QP)^T C (QP)\,,$$
où la matrice QP est inversible puisque Q et P sont inversibles. Donc $A \cong C$.

Exercice 4. On considère les vecteurs
$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^4.$$

Est-ce que $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ possède une base orthogonale par rapport à la forme bilinéaire symétrique standard?

Solution. *La réponse est non. On considère tous les 7 vecteurs non nuls dans l'espace* $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$*. Il faut seulement vérifier que tout triplet de vecteurs de* $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ *orthogonaux forment une liste linéairement dépendante.*

Voici toutes les paires de vecteurs non nuls de $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ *qui sont orthogonales (on doit aussi considérer les combinaisons linéaires des* v_1*,* v_2 *et* v_3*).*

$$\begin{array}{ll} (v_1, v_3), & (v_1, v_1 + v_3), \\ (v_2, v_1 + v_3), & (v_3, v_1 + v_3), \\ (v_2, v_1 + v_2 + v_3), & (v_1 + v_2, v_2 + v_3), \\ (v_1 + v_2, v_1 + v_3), & (v_1 + v_3, v_2 + v_3). \end{array}$$

Les triplets de vecteurs de $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ *orthogonaux sont* $(v_1, v_3, v_1 + v_3)$ *et* $(v_1 + v_2, v_1+v_3, v_2+v_3)$ *et on conclut facilement que ces deux listes sont linéairement dépendantes. Ainsi* $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ *n'admet pas de bases orthogonales.*

Exercice 5. Soit $V \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 sur $\mathbb{R}$ avec le forme bilinéaire

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} pq \mathrm{d}x.$$

1. Décrire la matrice $A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ pour $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.
2. Montrer que l'ensemble $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ de polynômes

$$\begin{array}{ll} p_0 = 1 & p_1 = x \\ p_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & p_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{array}$$

est une base orthogonale de V.

Solution. *1.*

$$A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}$$

2. Soit $q \in V$*. Nous écrivons* $q = q_3x^3 + q_2^2x^2 + q_1x^1 + q_0$*. Alors,*

$$\begin{aligned} q &= q_3x^3 + q_2^2x^2 + q_1x^1 + q_0 \\ &= \frac{2}{5}q_3p_3 + q_2^2x^2 + (q_1 + \frac{3}{5}q_3)x + q_0 \\ &= \frac{2}{5}q_3p_3 + \frac{2}{3}q_2p_2 + (q_1 + \frac{3}{5}q_3)x + (q_0 + \frac{1}{3}q_2) \\ &= \frac{2}{5}q_3p_3 + \frac{2}{3}q_2p_2 + (q_1 + \frac{3}{5}q_3)p_1 + (q_0 + \frac{1}{3}q_2)p_0. \end{aligned}$$

Cela implique que $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ *est une système générateur de* V *et* $|\{p_0, p_1, p_2, p_3\}| = \dim V$ *implique que c'est une base.*

On montre $\langle p_i, p_j\rangle = 0$ pour $i \neq j$ comme, pour instance,

$$\begin{aligned}\langle p_2, p_3\rangle &= \int_{-1}^{1} p_2 p_3 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (3x^2-1)(5x^3-3x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{5}{2}x^6 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exercice 6. Soit V un espace vectoriel sur un corps K et $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V \to K$ une forme bilinéaire. Soient $E \subseteq V$ et E^* le sous-espace de V engendré par les éléments de E. Montrer $E^\perp = E^{*\perp}$.

Rappel: Pour $W \subseteq V$, $W^\perp = \{v \in V : v \perp w \text{ pour tout } w \in W\}$.

Solution. *On doit montrer que $E^\perp = E^{*\perp}$. Pour cela, on montre que $E^\perp \subseteq E^{*\perp}$ et $E^{*\perp} \subseteq E^\perp$.*

- $\mathbf{E}^\perp \subseteq \mathbf{E}^{*\perp}$*: Soit $v \in E^\perp$. Donc on a $\langle v, e\rangle = 0$ pour tout $e \in E$. Si $w \in E^*$, on peut écrire ce vecteur comme $w = \sum_{i=1}^k c_i e_i$ pour quelque $k \in \mathbb{N}$ et quelques $e_1, \dots, e_k \in E$ et $c_i \dots, c_k \in K$. Alors*

  $$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{k} c_i \langle v, e_i\rangle = 0$$

  par BL 1). Vu que $\langle v, w\rangle = 0$ pour tout $w \in E^*$, on a $v \in E^{*\perp}$.

- $\mathbf{E}^{*\perp} \subseteq \mathbf{E}^\perp$*: Si $v \in E^{*\perp}$, on a $\langle v, e\rangle = 0$ pour tout $e \in E^*$, et en particulier $\langle v, e\rangle = 0$ pour tout $e \in E$. Alors $v \in E^\perp$.*

Exercice 7. Est-ce que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3\times 3}$$

est congruente à une matrice diagonale? *Renseignement: voir l'exercice 4.*

Solution. *Soit C notre matrice en considération. Soit $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ et $\langle\cdot\rangle$ la base et le produit scalaire de l'exercice 4, respectivement. Pour la matrice $A_B^{\langle\cdot\rangle}$, on sait que*

$$[v_i]_B A_B^{\langle\cdot\rangle} [v_j]_B = \left(A_B^{\langle\cdot\rangle}\right)_{ij}.$$

Du coup, on peut vérifier numériquement qu'on obtient précisément $C = A_B^{\langle\cdot\rangle}$*. Or, comme on a montré dans l'exercice 4, l'espace engendré par* v_1*,* v_2 *et* v_3 *n'admet pas de base orthogonale. Et cela implique que la matrice* $C = A_B^{\langle\cdot\rangle}$ *n'est pas diagonalisable.*

Preuve alternative :
Soit C *notre matrice en considération, et supposons qu'il existe une matrice inversible* P *telle que* $P^T C \overline{P}$ *est diagonale. Si* $(a, b, c)^T$ *est une colonne de* P*, on obtient*

$$(a, b, c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2(ab + bc) = 0,$$

ce qui montre que la matrice diagonale $P^T C \overline{P}$ *a des zéros dans sa diagonale, et donc* $P^T C \overline{P} = 0$*. Or, comme* P *est inversible, la matrice* C *correspond elle même à une application nulle. Mais cela n'est pas le cas, puisque par exemple* $C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$*.*

Exercice 8. Transformez les matrices suivantes en matrices diagonales dont les éléments sont $0, 1$ et -1. Combien de 0's, 1's et -1's sont sur la diagonale? (Ces numéros sont appellént l'indice de nullité, l'indice de positivité et l'indice de négativité.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution.

1. *On va utiliser l'algorithme 1.1 pour diagonaliser* A*. On additione* -2 *fois la première ligne sur la deuximème ligne pour obtenir* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ *et* -2 *fois la première colonne sur la deuximème colonne pour obtenir la matrice diagonale* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$*. Finalement on multiplie la deuximème colonne par* $1/5$ *et on a* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *Donc l'indice de nullité est* $r_0 = 0$*, l'indice de positivité est* $r_+ = 1$*, et l'indice de negativité est* $r_- = 1$*.*

2. *On additione* -1 *fois la première ligne sur la deuximème ligne:* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*. On additione* -1 *fois la première colonne sur la deuximème colonne:* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*. Donc l'indice de nullité est* $r_0 = 1$*, l'indice de positivité est* $r_+ = 1$ *et l'indice de negativité est* $r_- = 0$*.*

3. *On additione* -2 *fois la première ligne sur la deuximème ligne et après* -2 *fois la première colonne sur la deuximème colonne pour obtenir:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On additione -1 fois la première ligne sur la troisième ligne et après -1 fois la première colonne sur la troisième colonne pour obtenir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

On additione $-3/5$ fois la deuxième ligne sur la troisième ligne et et après $-3/5$ fois la deuxième colonne sur la troisième pour obtenir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

On multiplie la premiére colonne par $1/2$, la deuxième colonne par $1/5$ et la troisième colonne par $5/4$ pour avoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc l'indice de nullité est $r_0 = 0$, l'indice de positivité est $r_+ = 2$, et l'indice de negativité est $r_- = 1$.