**Algèbre linéaire avancée II**
printemps 2019

**Série 2 - Corrigé**

**Exercice 1.** Soient $K$ un corps et $n$ un entier positif. Montrer que la matrice $A \in K^{n\times n}$, donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

a le polynôme caractéristique $p_A(t) = (-1)^n(t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0)$.

**Solution.** *On montre cette identité par récurrence. Pour $n = 2$, on obtient le résultat voulu:*

$$p_A(t) = \det(A - tI_2) = \begin{pmatrix} -t & -\alpha_0 \\ 1 & -t-\alpha_1 \end{pmatrix} = t(t+\alpha_1) + \alpha_0 = t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0.$$

*On suppose le résultat vrai au rang $n-1$, et on le montre au rang $n$. Avec $\det(A - tI_n) = (-1)^n \det(tI_n - A)$, on a*

$$(-1)^n p_A(t) = \det(tI_n - A) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & t & \ddots & & \vdots & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t & \alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & t+\alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

*On développe le déterminant par rapport à la première ligne (formule de Laplace) et on obtient*

$$\begin{aligned} \dots &= t \det \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_1 \\ -1 & t & \ddots & & \vdots & \alpha_2 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t & \alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & t+\alpha_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n+1}\alpha_0 \det \begin{pmatrix} -1 & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= t(t^{n-1} + \alpha_{n-1}t^{n-2} + \cdots + \alpha_2 t + \alpha_1) + (-1)^{n+1}\alpha_0(-1)^{n-1} \\ &= t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0, \end{aligned}$$

*où pour le premier terme on a utilisé l'hypothèse au rang $n-1$, et pour le second terme, le fait que la matrice est triangulaire supérieure de diagonale $-1$.*

**Exercice 2.** Soit $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in K[t]$, $V$ un espace vectoriel sur $K$, et $f : V \to V$ un endomorphisme. Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $f$, alors $p(\lambda)$ est une valeur propre de $p(f)$, où $p(f)(v) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i(v)$ avec $f^0(v) = I(v)$.

**Solution.**

$$p(f)(v) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i(v) = a_0 v + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda f^{i-1}(v) = \cdots = \left( \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i \right) v = p(\lambda) v.$$

**Exercice 3.** 1. Soit $A \in K^{n\times n}$ une matrice triangulaire inférieure, c-à-d

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'ensemble de valeurs propres de $A$ est $\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$.

2. Est-ce que $A$ est diagonalisable?

3. Est-ce que les deux matrices suivantes sont semblables?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Solution.** *1. On sait que pour une matrice triangulaire inférieure est le produit de entrées diagonales. Alors,*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda)$$

*Voici, les racines de $p_A(\lambda)$ sont les valeurs $a_{ii}$.*

*2. En generalement, non. Pour instance, regarder $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mais si tous les valeurs $a_{ii}$ sont differentes, alors $A$ est diagonalisable.*

*3. Les matrices $A$ et $B$ a les valeurs propres $\{1,2,3\}$, et $m_{\text{geom}}(i) = m_{\text{alg}}(i) = 1$ pour $i = 1,2,3$. Alors, il y a deux matrices t.q. $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(1,2,3)$ et $Q^{-1}BQ = \operatorname{diag}(1,2,3)$. Donc, $A = PQ^{-1}BQP^{-1}$, avec $(PQ^{-1})^{-1} = QP^{-1}$. On a*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad et \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** Soient $K$ un corps, et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ les valeurs propres (comptées avec leurs multiplicitées) d'une matrice $A \in K^{n\times n}$.

**Définition:** La *trace* de $A$ est définie par $\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Démontrer les assertions suivantes:

*i)* $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

*ii)* Si $p_A(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$, montrer que $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A)$.

*iii)* $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

*iv)* $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, où $P$ est une matrice inversible.

**Solution.** *On a*

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I_n) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\dots(\lambda_n-\lambda) \\ &= (-1)^n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0, \end{aligned}$$

*où* $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K$.

*i) On a directement que*

$$\det(A) = \det(A - 0I_n) = p_A(0) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n.$$

*ii) Avec Kronecker's delta* $\delta_{i,j}$, *on a*

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I_n) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \underbrace{\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n \left(a_{i,\sigma(i)} - \delta_{i,\sigma(i)}\lambda\right)}_{=:B(\sigma)(\lambda)\in K[\lambda]}. \end{aligned}$$

*Si* $\deg(B(\sigma)(\lambda)) \geq n-1$, *on a* $\sigma(i) \neq i$ *pour au plus un indice* $i$. *Mais car* $\sigma$ *est un permutation, on a* $\sigma = I$ *forcement. Donc on calcule*

$$\begin{aligned} B(I) &= \mathrm{sgn}(I)\prod_{i=1}^n (a_ii - \lambda) \\ &= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n a_ii\right) + q(\lambda) \end{aligned}$$

*avec* $\deg(q(\lambda)) \leq n-2$. *Alors* $p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A)\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + \alpha_0$.

*iii) En évaluant* $p_A(\lambda)$, *on remarque que le coefficient* $\alpha_{n-1}$ *est donné par* $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^n \lambda_i$. *Par (ii), on a par ailleurs que* $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A)$. *Donc,* $\mathrm{Tr}(A) = (-1)^{n-1}\alpha_{n-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

*iv) De (iii) on a* $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$*. En utilisant que* $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(APP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$*, on obtient l'assertion.*

**Exercice 5.** 1. Vérifier le Théorème de Cayley–Hamilton sur la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

2. Soient $K$ un corps, et $A \in K^{2\times 2}$. Soit $p_A(t) = t^2 + a_1 t + a_0$ avec $a_0 \neq 0$. Calculer l'inverse de $A$ à l'aide du Théorème de Cayley–Hamilton.

3. Considérer le Théorème de Cayley–Hamilton. On pourrait penser qu'il est possible d'utiliser l'argument $p_A(A) = \det(A\cdot I_n - A) = 0$ pour montrer le théorème. Montrer que ce raisonnement est faux.

**Solution.** *1. On calcule le polynôme caractéristique de $A$, on trouve*

$$p_A(t) = \det(tI_3 - A) = t^3 - t^2 + 3.$$

*Si on évalue $p_A$ en $A$ on trouve*

$$\begin{aligned} p_A(A) = A^3 - A^2 + 3I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

*et donc le théorème est vérifié.*

*2. Pour $M \in K^{n\times n}$ on a la formule $det(M) = (-1)^n p_M(0)$; pour $A$ on obtient $det(A) = p_A(0) = a_0 \neq 0$, donc $A$ est bien inversible. Par le théorème de Cayley–Hamilton on a $A^2 + a_1 A + a_0 I_2 = 0_2$. En appliquant $A^{-1}$ gauche on a $A + a_1 I_2 + a_0 A^{-1} = 0_2$, ce qui donne $A^{-1} = -(A + a_1 I_2)/a_0$.*

*3. Soit $R$ un anneau commutatif. Pour $A \in R^{n\times n}$ et $n > 1$, on ne peut pas simplement remplacer $t$ par $A$ car $\det(A - tI_n) \in R$ tandis que $p_A(A) \in R^{n\times n}$.*

**Exercice 6.** 1. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & \mathrm{i} & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

2. Calculer $D^{100}$ pour la matrice $D = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 2 \\ 2 & -10 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

3. Déterminer pour quelles valeurs du couple $(a, b)$ la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0,$$

est diagonalisable.

**Solution.** *1. (a) La matrice $A$ est triangulaire supérieure. On sait que les valeurs propres sont les éléments diagonaux : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$, $\lambda_3 = -1$. Les valeurs propres sont toutes distinctes les unes des autres, donc la matrice $A$ est diagonalisable.*

*(b) Les valeurs propres de $B$ sont les zéros du polynôme caractéristique*

$$\begin{aligned} p_B(t) = \det(tI_3 - B) &= \det \begin{pmatrix} t-5 & 1 & 1 \\ 1 & t-5 & 1 \\ 1 & 1 & t-5 \end{pmatrix} \\ &= (t-5)^3 + 1 + 1 - (t-5)(1+1+1) \\ &= t^3 - 15t^2 + 72t - 108. \end{aligned}$$

*On voit que la matrice $6I_3 - B$ a tous ses éléments égaux à $1$, elle est donc singulière. Ainsi, $6$ est une racine de $p_B$. On peut alors factoriser $p_B$ et obtenir*

$$p_B(t) = (t-6)(t^2 - 9t + 18) = (t-3)(t-6)(t-6).$$

*Les valeurs propres de $B$ sont alors $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$. On a $m_{\mathrm{alg}}(3) = 1$ et $m_{\mathrm{alg}}(6) = 2$. D'office on a $m_{\mathrm{geom}}(3) = 1$, mais nous devons encore calculer la dimension de $E_6(B)$ afin de savoir si on a $m_{\mathrm{geom}}(6) = 2$ ou $m_{\mathrm{geom}}(6) = 1$. On a*

$$E_6(B) = \ker(6\, I_3 - B) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*On voit que $\operatorname{rank}(6I_3 - B) = 1$. Donc la dimension du noyau est 2, et ainsi $m_{\mathrm{geom}}(6) = 2$. On obtient que $m_{\mathrm{alg}}(\lambda) = m_{\mathrm{geom}}(\lambda)$ pour toutes les valeurs propres $\lambda$ et donc $B$ est diagonalisable.*

(c) *La matrice $C$ a pour polynme caractéristique*

$$p_C(t) = t^3 - t^2 - t + 1 = (t+1)(t-1)(t-1).$$

*Ses valeurs propres sont donc* $-1$ *et* $1$. *On obtient* $m_{\mathrm{alg}}(-1) = 1 = m_{\mathrm{geom}}(-1)$ *et* $m_{\mathrm{alg}}(1) = 2$. *Par ailleurs,*

$$E_1(C) = \ker(I_3 - C) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*On voit que* $\dim E_1(C) = 1$, *et on obtient* $m_{\mathrm{geom}}(1) = 1$. *Comme* $m_{\mathrm{geom}}(1) = 1 \neq 2 = m_{\mathrm{alg}}(1)$, *la matrice* $C$ *n'est pas diagonalisable.*

2. *Comme* $D = -2B$, *on a que* $D = V \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 & & \\ & -2 \cdot 6 & \\ & & -2 \cdot 6 \end{pmatrix} V^{-1}$, *où* $V$ *contient des vecteurs propres de* $B$. *Il faut encore calculer* $V$ :

   (a) *pour la valeur propre* $\lambda = 3$, *on résout le système* $(3I_3 - B)x = 0_3$, *et on trouve qu'un vecteur propre associ est* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) *pour la valeur propre* $\lambda = 6$, *on résout le système* $(6I_3 - B)x = 0_3$, *et on trouve que deux vecteurs propres (indépendants) associés sont* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   *Alors,*

$$\begin{aligned} D^{100} &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^{100} & & \\ & 12^{100} & \\ & & 12^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^{100} & & \\ & 12^{100} & \\ & & 12^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. *On a*

$$\begin{aligned} \det(X - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & a & b \\ a & -\lambda & b \\ a & b & -\lambda \end{pmatrix} &\overset{\substack{G_{21}(-1) \\ G_{23}(-1)}}{=} \det \begin{pmatrix} -\lambda - a & a + \lambda & 0 \\ a & -\lambda & b \\ 0 & b + \lambda & -\lambda - b \end{pmatrix} \\ &= (\lambda + a)(\lambda + b) \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ a & -\lambda & b \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda + a)(\lambda + b)(\lambda - a - b). \end{aligned}$$

*On a trois valeurs propres $-a$, $-b$, et $a+b$, pas forcément distinctes. On considère alors plusieurs cas:*

(a) *Supposons que $-a = -b = a+b$. On trouve $a = b = 0$ et ceci contredit l'hypothèse $a, b$ non nuls.*

(b) *Supposons que $-a = -b \neq a+b$. On a donc $a = b$ et deux valeurs propres $-a$ et $2a$ avec multiplicités $m_{\text{alg}}(2a) = 1 = m_{\text{geom}}(2a)$ et $m_{\text{alg}}(-a) = 2$. Puisque*

$$X - (-a)I_3 = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \overset{\substack{G_{12}(-1) \\ G_{13}(-1) \\ M_1(a^{-1})}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*alors $m_{\text{geom}}(-a) = 2 = m_{\text{alg}}(-a)$ et $A$ est diagonalisable.*

(c) *Supposons que $-a = a+b \neq -b$. On a donc $b = -2a$ et deux valeurs propres $-a$ et $2a$ avec multiplicités $m_{\text{alg}}(-a) = 2$ et $m_{\text{alg}}(2a) = 1 = m_{\text{geom}}(2a)$. Puisque*

$$X - (-a)I_3 = \begin{pmatrix} a & a & -2a \\ a & a & -2a \\ a & -2a & a \end{pmatrix} \overset{\substack{M_1(a^{-1}) \\ M_2(a^{-1}) \\ M_3(a^{-1})}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\substack{G_{12}(-1) \\ G_{13}(-1)}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \overset{P_{23}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*alors $m_{\text{geom}}(-a) = 1 \neq m_{\text{alg}}(-a)$ et $A$ n'est pas diagonalisable.*

(d) *Supposons que $-b = a+b \neq -a$. On a donc $b = -a/2$ et deux valeurs propres $-a$ et $a/2$ avec multiplicités $m_{\text{alg}}(a/2) = 2$ et $m_{\text{alg}}(-a) = 1 = m_{\text{geom}}(-a)$. Puisque*

$$X - (a/2)I_3 = \begin{pmatrix} -a/2 & a & -a/2 \\ a & -a/2 & -a/2 \\ a & -a/2 & -a/2 \end{pmatrix} \overset{\substack{M_1(a^{-1}) \\ M_2(a^{-1}) \\ M_3(a^{-1})}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\substack{G_{23}(-1) \\ G_{12}(2)}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*alors $m_{\text{geom}}(a/2) = 1 \neq m_{\text{alg}}(a/2)$ et $X$ n'est pas diagonalisable.*

(e) *Supposons que les trois valeurs propres $-a$, $-b$, $a+b$ sont distinctes, alors la matrice $X$ est diagonalisable.*