

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 2

Exercice 1. Soient K un corps et n un entier positif. Montrer que la matrice $A \in K^{n \times n}$, donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

a le polynôme caractéristique $p_A(t) = (-1)^n(t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_1t + \alpha_0)$.

Exercice 2. Soit $p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \in K[t]$, V un espace vectoriel sur K , et $f : V \rightarrow V$ un endomorphisme. Montrer que si λ est une valeur propre de f , alors $p(\lambda)$ est une valeur propre de $p(f)$, où $p(f)(v) = \sum_{i=0}^n a_i f^i(v)$ avec $f^0(v) = I(v)$.

Exercice 3. 1. Soit $A \in K^{n \times n}$ une matrice triangulaire inférieure, c-à-d

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'ensemble de valeurs propres de A est $\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$.

2. Est-ce que A est diagonalisable?

3. Est-ce que les deux matrices suivantes sont semblables?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soient K un corps, et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ les valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités) d'une matrice $A \in K^{n \times n}$.

Définition: La *trace* de A est définie par $\text{Tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Démontrer les assertions suivantes:

- i) $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
- ii) Si $p_A(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$, montrer que $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A)$.
- iii) $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$
- iv) $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, où P est une matrice inversible.

Exercice 5. 1. Vérifier le Théorème de Cayley–Hamilton sur la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- 2. Soient K un corps, et $A \in K^{2 \times 2}$. Soit $p_A(t) = t^2 + a_1 t + a_0$ avec $a_0 \neq 0$. Calculer l'inverse de A à l'aide du Théorème de Cayley–Hamilton.
- 3. Considérer le Théorème de Cayley–Hamilton. On pourrait penser qu'il est possible d'utiliser l'argument $p_A(A) = \det(A \cdot I_n - A) = 0$ pour montrer le théorème. Montrer que ce raisonnement est faux.

Exercice 6. 1. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3},$

(b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$

2. Calculer D^{100} pour la matrice $D = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 2 \\ 2 & -10 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$

3. Déterminer pour quelles valeurs du couple (a, b) la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0,$$

est diagonalisable.