Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 1 - Corrigé

Exercice 1. Soient $V = \mathbb{R}_n[t]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n sur $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ une base et $v = (1, a, a^2, \ldots, a^n)^\intercal \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que pour $p \in V$, on a $v^\intercal [p]_B = p(a)$, où $p(x) \in \mathbb{R}$ est l'évaluation de p en $x \in \mathbb{R}$.

Solution. *Nous Écrivons* $p = \sum_{i=0}^n p_i t^i$*, alors* $([p]_B)_i = p_{i-1}$ *pour* $i = 1, \ldots, n+1$*. On calcule*

$$v^\intercal [p]_B = \sum_{i=1}^{n+1} a^{i-1} p_{i-1} = \sum_{i=0}^{n} p_i a^i = p(a).$$

Exercice 2. Calculer les valeurs propres et les espaces propres des matrices suivantes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ (mais avec $\varphi \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$ dans le cas 2).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution.

1. *Le polynôme characteristique est* $\det(A_1 - \lambda \mathrm{id}) = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$. *Pour* $\lambda_1 = 1$*, on a* $A_1 x = x \Leftrightarrow x_1 = x_2$*, et pour* $\lambda_2 = -1$*, on a* $A_2 x = -x \Leftrightarrow x_2 = -x_1$*. Les espaces propres sont alors* $E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ *pour* λ_1*, et* $E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ *pour* λ_2*. C'est le méme pour* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2. $\det(A_2 - \lambda \mathrm{id}) = (\cos(\varphi) - \lambda)^2 + \sin^2(\varphi) = \lambda^2 - 2\lambda\cos(\varphi) + 1$*. Pour* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $\varphi \notin \{\pi t \mid t \in \mathbb{Z}\}$*, ce terme n'a pas de racine, c-à-d nous n'avons pas de valeur propre. Autrement, ca implique* $\lambda_{1,2} = \cos(\varphi) \pm \sqrt{\cos^2(\varphi) - 1}$.

   Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $\varphi \in \{\pi t \mid t \in \mathbb{Z}\}$*, nous avons* $A_2 = \mathrm{id}$ *et tous les vecteurs pas egal à* 0 *sont vecteurs propres. Pour* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, on a* $\lambda_{1,2} = \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi)$*. Le valeur propre* λ_1 *a l'espace propre*

   $$\sin(\varphi)\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\}.$$

   Similairement, $E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right\}$.

3. $\det(A_3 - \lambda \mathrm{id}\,) = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 1$. *On calcule*

$$0 = (A_3 - \mathrm{id}\,)v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = 0.$$

Alors, $E_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

4. *On a*

$$\begin{aligned} \det(A_4 - \lambda \mathrm{id}\,) &= (3-\lambda)^2(5-\lambda) + 2 - 2(3-\lambda) - (5-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 \\ &= (6-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

Alors, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$ *et*

$$E_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad E_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad E_3 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 3. Sachant que $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 10$, calculer $\det \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{pmatrix}$.

Solution. *On sait que* det *est lineáire dans chaque ligne et qu'il est invariant d'ajouter une ligne. Alors,*

$$\det \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{pmatrix} = 4 \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{pmatrix} = 4 \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 3d & 3e & 3f \end{pmatrix}$$

$$= 12 \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix} = -12 \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -12 \cdot 10 = -120\,.$$

Exercice 4. Soient V un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$, et $f : V \to V$ un endomorphisme. On dit que un sous-espace vectoriel $U \subseteq V$ est *invariant* par f si $f(U) \subseteq U$. Montrer que les espaces propres de $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ sont invariants par f.

Solution. *Soit* λ *une valeur propre de* f^n, *et* $v_0 \in E_\lambda \setminus \{0\}$. *Pour* $i = 1, \ldots, n$, *soit* $v_i = f(v_{i-1})$. *On a* $v_n = f^n(v_0) = \lambda v_0$, *et de même,*

$$f^n(v_k) = f^n(f^k(v_0)) = f^{n+k}(v_0) = f^k(f^n(v_0)) = f^k(\lambda v_0) = \lambda v_k,$$

où nous utilisons la linéarité de f. *Donc,* $v_k \in E_\lambda$ *aussi, et en particulier* $v_1 \in E_\lambda$. *Donc, l'espace propre* E_λ *est invariant par* f.

Exercice 5. Soit $\pi : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ bijective (c-à-d une permutation). Soit $f_\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $f_\pi((x_1,x_2,\dots,x_n)^\intercal) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)})^\intercal$. Calculer toutes les valeurs propres de f_π et les espaces propres associés.

Solution. *Pour un vecteur propre v avec valeur propre λ, on a $|\lambda|\|v\| = \|\lambda v\| = \|f_\pi(v)\| = \|v\|$. Ca implique que les seules valeurs propres possibles sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.*

Soit v un vecteur propre pour $\lambda_1 = 1$. Ceci est équivalent à la condition

$$\forall i \in \{1,\dots,n\} : \; v_i = (f_\pi(v))_i = v_{\pi(i)} \quad \textit{et} \quad v \neq 0.$$

Ainsi, l'espace propre est donné par

$$E_1 = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1,\dots,n\} : \; v_i = v_\pi(i)\}.$$

On fait montrer que $\dim(E_1) > 0$. Mais c'est vrai car $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ implique $\mathbf{1} \in E_1$.

On considère $\lambda_2 = -1$. Car π est bijective sur l'ensemble fini $\{1,\dots,n\}$, pour chaque $i \in \{1,\dots,n\}$, il y a un entier minimal $0 < n_i \leq n$ tel que $\pi^{n_i}(i) = i$. Soit v un vecteur propre pour $\lambda_1 = 1$. Ceci est équivalent à la condition

$$\forall i \in \{1,\dots,n\} : \; v_i = (f_\pi(v))_i = v_{\pi(i)} \quad \textit{and} \quad v \neq 0. \tag{1}$$

Mais si $n_i \equiv 1 \mod 2$ pour tous i, ca implique $x_i = -x_i$, et le seul vecteur qui satisfai les conditions est $\mathbf{0}$. Donc -1 n'est pas une valeur propre dans ce cas.

S'il existe un $k \in \{1,\dots,n\}$ avec $n_k \equiv 0 \mod 2$, nous obtenons une série

$$x_k = -x_{\pi(k)} = x_{\pi^2(k)} = -x_{\pi^3(k)} = \cdots = x_{\pi^{n_k}(k)} = x_k,$$

avec $\pi^i(k) \neq \pi^j(k)$ pour $i \neq j$ (car n_k est minimal). Le vecteur $x \neq 0$ donné par

$$x_i = \begin{cases} 1 & i = \pi^j(k) \textit{ pour } j \equiv 0 \mod 2 \\ -1 & i = \pi^j(k) \textit{ pour } j \equiv 0 \mod 2 \\ 0 & i \neq \pi^j(k) \textit{ pour chaque } j \in \{0,\dots,n-1\} \end{cases}$$

remplit la condition (1). Ainsi, s'il existe un $n_k \equiv 0 \mod 2$, -1 est une valeur propre et l'espace propre est donné par

$$E_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1,\dots,n\} : \; v_i = v_\pi(i)\}.$$

Exercice 6.

1. Montrer que l'égalité suivante donne l'équation de la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par (x_1,y_1) et (x_2,y_2) :

$$\det \begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

2. Montrer que l'aire du triangle de sommets $(x_1,y_1), (x_2,y_2)$ et (x_3,y_3) est donnée par

$$\frac{1}{2}\left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

Solution. *1. En développant le déterminant par la troisième ligne, on obtient :*

$$\begin{aligned}(x_1y_2 - x_2y_1) - (xy_2 - x_2y) + (xy_1 - x_1y) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad (x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1 = (y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1 \\ \Leftrightarrow \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),\end{aligned}$$

qui est bel et bien l'équation de la droite de $\mathbb{R}^2$ *passant par* (x_1, y_1) *et* (x_2, y_2)*.*

2. *L'aire du triangle de sommets* $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *et* (x_3, y_3) *vaut* $1/2$ *de l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs* $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ *et* $(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$*. L'aire de ce parallélogramme vaut*

$$\left|\det \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}}_{=:A}\right|.$$

En effet, que le parallélogramme engendré par les vecteurs $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ *et* $(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ *est l'image de* $[0, 1]^2$ *dans le transformation lineaire* T *donnè par* $T(x) = Ax$*, et on sait que (vu en analyse)*

$$\int_{T([0,1]^2)} x \ dx = \det(T) \int_{[0,1]^2} x \ dx = \det(A).$$

Alors on calcule

$$\begin{aligned}\left|\det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}\right| &= |(x_1y_2 - x_2y_1) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2)| \\ &= \left|\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|.\end{aligned}$$

L'assertion suit.