École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 14

Abgabe zur Ermöglichung der Korrektur nur bis **17.12.2014**.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

1. Bestimmen Sie eine orthogonale Diagonalisierung von
$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ mit $\det A \neq 0$ und $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ eine quadratische Form.
Für welche Werte von $\det(A)$ und a ist die Q positiv definit, negativ definit beziehungsweise indefinit?

Lösung:

1. Die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren sind
$$\lambda_1 = 5, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = 10, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Zur orthogonalen Diagonalisierung benötigen wir orthonormale Eigenvektoren. Obige Eigenvektoren sind bereits orthogonal (da zu verschiedenen Eigenwerten), also müssen wir sie nur noch normalisieren:
$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Mit $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (zufällig symmetrisch) erhalten wir
$$A = PDP^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

2. Um zu überprüfen, ob die quadratische Form Q positiv oder negativ definit ist, müssen wir die Eigenwerte von A bestimmen. Diese Eigenwerte λ_1 und λ_2 sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms:
$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$
Wir erhalten also $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ und $\lambda_1\lambda_2 = ad - b^2 = \det A$.

Q ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A echt positiv sind (das heisst genau dann, wenn $\det A > 0$ und $a + d > 0$ gilt).

Q ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A alle echt negativ sind (das heisst genau dann, wenn $\det A > 0$ und $a + d < 0$ gilt).

Q ist indefinit wenn die Eigenwerte von A verschiedene Vorzeichen haben (das heisst genau dann, wenn $\det A < 0$ gilt).

Da $\det A > 0$ erfüllt genau dann ist, wenn $ad > b^2 \geq 0$ gilt, müssen daher a und d das gleiche Vorzeichen haben. Das bedeutet, dass die Bedingung $a + d > 0$ (beziehungsweise $a + d < 0$) durch $a > 0$ (beziehungsweise $a < 0$) ersetzt werden kann.

Aufgabe 2

1. Zeigen Sie: Wenn A orthogonal diagonalisierbar ist, dann ist auch A^2 orthogonal diagonalisierbar.

2. Sei
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$
Bestimmen Sie eine orthogonale Diagonalisierung von A.

3. Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum der Funktion $f(x, y) = 5x^2 - 4xy + 5y^2$ auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$.

Lösung:

1. Wenn A orthogonal diagonalisierbar ist, dann existiert eine invertierbare Matrix P mit $P^T = P^{-1}$, so dass $A = P^T DP$ für eine Diagonalmatrix D. Damit gilt auch
$$A^2 = (P^T DP) \cdot (P^T DP) = P^T D^2 P$$
und somit ist A^2 auch orthogonal diagonalisierbar.

2. Mit Hilfe des charakteristischen Polynoms finden wir die Eigenwerte 1 (mit Vielfachheit 2) und 10. Dann berechnen wir die zugehörigen Eigenvektoren und erhalten
$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$
zum Eigenwert 1 und $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ zum Eigenwert 10.

Da $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ nicht orthogonal sind, wenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren an und erhalten $\boldsymbol{v'}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Damit ist $bdv_1, \boldsymbol{v'}_2, \boldsymbol{v_3}$ eine orthogonale Menge von Eigenvektoren von A.

Um eine orthogonale Diagonalisierung von A zu erhalten, müssen wir diese Vektoren noch normieren und erhalten:
$$\boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{18} \\ -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u_3} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Es gilt also $A = PDP^T$ mit

$$P = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & 4/\sqrt{18} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Spektralzerlegung von A ist

$$\begin{aligned} A &= \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^T + \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2^T + 10\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_3^T \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 16 \end{bmatrix} + \frac{10}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Die orthogonale Diagonalisierung der Matrix von $Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right),$$

und wir erhalten die quadratische Form ohne gemischte Terme:

$$R(y_1, y_2) = 3y_1^2 + 7y_2^2, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}.$$

Es ist zu beachten, dass ein solcher Variablenwechsel den Kreis $x_1^2 + x_2^2 = 1$ nicht verlässt, denn

$$y_1^2 + y_2^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)\right)^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Die ursprüngliche Frage ist somit dazu äquivalent, das Minimum und das Maximum von $R(y_1, y_2) = 3y_1^2 + 7y_2^2$ auf dem Einheitskreis $y_1^2 + y_2^2 = 1$ zu finden. Dies aber nun viel einfacher: Das Minimum wird für $(y_1, y_2) = (\pm 1, 0)$ und das Maximum für $(y_1, y_2) = (0, \pm 1)$ angenommen, das heisst das Minimum ist $R(1, 0) = 3$ und das Maximum ist $R(0, 1) = 7$. Also sind 3 und 7 auch der minimal bzw. maximale Wert von $f(x, y)$ auf dem Einheitskreis.

Aufgabe 3

1. Für $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, was ist $\mathbf{v}^T\mathbf{v}$ beziehungsweise $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$?

   Geben Sie die Projektionsmatrix an, die einen Vektor in den von $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraum von $\mathbb{R}^3$ projeziert, und nutzen Sie sie, um

   $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in diesen Unterraum Span($\mathbf{v}$) zu projezieren.

2. Seien $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^2$.

   (a) Finden Sie die Matrix A zur quadratischen Form

   $$Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2.$$

(b) Bestimmen Sie einen Variablenwechsel $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, der die quadratische Form $Q(\boldsymbol{x})$ in eine quadratische Form $Q(\boldsymbol{y}) = ay_1^2 + by_2^2$ (ohne gemischte Terme) überführt. Geben Sie a und b an.

3. Wir betrachten die quadratische Form

$$Q(\mathbf{x}) = 13x_1^2 + 22x_2^2 + 5x_3^2 + 12x_1x_2.$$

(a) Finden Sie die Matrix A von Q, so dass $(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von Q und charakterisieren Sie den Typ von Q.

(c) Berechnen Sie die Hauptachsen von Q.

(d) Beschreiben Sie durch eine Variablenwechsel $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, die Form $Q(\boldsymbol{y})$ ohne gemischte Terme. Geben Sie die Matrix P an.

Lösung:

1. Es ist $\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|^2$ die Norm von $\boldsymbol{v}$ (also eine Zahl), und $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}^T$ ist eine $n \times n$ Matrix, nämlich die um $\|\boldsymbol{v}\|^2$ skalierte Projektionsmatrix. Durch Normieren mit $\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$ erhalten wir also die gesuchte Projektionsmatrix $P = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}^T}{\boldsymbol{v}^T\cdot\boldsymbol{v}}$. Dass P wirklich in den Unterraum Span$(\boldsymbol{v})$ abbildet, kann man wie folgt sehen:

$$P \cdot \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}^T}{\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{v}}\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}$$

Für das Beispiel in der Aufgabenstellung erhalten wir

$$proj_{\mathrm{Span}(\boldsymbol{v})}(\boldsymbol{x}) = P \cdot \boldsymbol{x} = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 6 & 9 & 12 \\ 12 & 18 & 36 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\mathbf{v}.$$

2. (a) Die zur quadratischen Form Q gehörige symmetrische Matrix A ist:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Die Spalten von P des Variablenwechsels sind die normierten Eigenvektoren von A :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit $\boldsymbol{x} = P\,\boldsymbol{y}$ erhält man

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T P^T AP\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T D\boldsymbol{y} = 6y_1^2 - 4y_2^2 = G(\boldsymbol{y})$$

wobei die Diagonalelement der Diagonalmatrix D sind die Eigenwerte (6 und -4) von A.

3. (a) Die zugehörige symmetrische Matrix ist :

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 6 & 0 \\ 6 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(b) Die Eigenwerte von A sind $25, 10, 5$. Somit ist die quadratische Form positiv definit.

(c) Die Hauptachsen von Q sind die normierten Eigenvektoren von A :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d) Mit demselben Vorgehen wie im vorherigen Aufgabenteil erhalten wir $Q(\boldsymbol{y}) = 25y_1^2 + 10y_2^2 + 5y_3^2$ für

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 7.1 und 7.2

1. Jede orthogonal diagonalisierbare $n \times n$ Matrix ist symmetrisch.
2. Jede symmetrische $n \times n$ Matrix hat n verschiedene reelle Eigenwerte.
3. Eine Matrix A ist orthogonal diagonalisierbar genau dann, wenn A symmetrisch und invertierbar ist.
4. Die Hauptachsen einer quadratischen Form $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ sind die Eigenvektoren von A.
5. Wenn alle Eigenwerte einer symmetrischen Matrix A positiv sind, dann ist die quadratische Form $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ positiv definit.
6. Der Ausdruck $\|\boldsymbol{x}\|^2$ beschreibt eine quadratische Form.

Lösung: Kapitel 7.1 und 7.2

1. W
2. F
3. F
4. F
5. W
6. W