École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 12

Abgabe bis **08.12.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

1. Seien

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Berechnen Sie $\mathbf{u}^T\mathbf{u}$, $\mathbf{v}^T\mathbf{v}$, $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$ und $\|\mathbf{v}\|$.
   b) Normieren Sie $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ (d.h. finden Sie Einheitsvektoren mit der gleichen Richtung).
   c) Bestimmen Sie die Distanz zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$, sowie den eingeschlossenen Winkel.

2. Welche Paare der folgenden Vektoren sind orthogonal?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3. Zeigen Sie den Satz von Pythagoras (mit Hilfe von Vektoren, Orthogonalität, Norm) :
   In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse im Quadrat gleich der Summe der Kathetenlängen im Quadrat.

4. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $S^\perp = \mathrm{Span}(S)^\perp$ gilt und dass $S^\perp$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

   Geben Sie für $S = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^3$ eine Basis von $S^\perp$ an.

Lösung:

1. a)

$$\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 5 \cdot 5 = 35$$
$$\mathbf{v}^T\mathbf{v} = 6 \cdot 6 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 49$$
$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 3 \cdot 6 + (-1) \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = 35$$
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} = \sqrt{35}, \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} = \sqrt{49} = 7$$

   b)

$$\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\text{dist}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{(3-6)^2 + (-1-(-2))^2 + (5-3)^2)} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

Mit Hilfe des Kosinussatzes erhalten wir

$$\cos(\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})) = \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{35}{\sqrt{35}\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7} = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

und damit $\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 32.31°$.

2. $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$, sowie $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_4$ sind orthogonal.

3. Wir bezeichnen die Längen der Katheten mit a, b und die Länge der Hypotenuse mit c. Wir möchten also $a^2+b^2=c^2$ zeigen. Wir legen dazu den Ursprung in den Eckpunkt des Dreiecks, an dem der rechte Winkel anliegt. Dann setzen wir $\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$. Wir stellen fest, dass nach Konstruktion $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = c$ gilt. Laut Kosinussatz gilt ausserdem

$$\mathbf{u^T v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(90°) = 0$$

und somit folgt

$$c^2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^{\mathbf{2}} - 2\mathbf{u^T v} = a^2+b^2.$$

4. Wir zeigen $\text{Span}(S)^\perp = S^\perp$ in zwei Schritten:

- $\text{Span}(S)^\perp \subseteq S^\perp$: Wenn $\mathbf{u}$ orthogonal zu allen $\mathbf{v} \in \text{Span}(S)$ ist, dann ist $\mathbf{u}$ auch orthogonal zu allen $\mathbf{v} \in S$, denn $S \subseteq \text{Span}(S)$.
- $S^\perp \subseteq \text{Span}(S)^\perp$: Wenn $\mathbf{u}$ orthogonal zu allen $\mathbf{v}_i \in S$ ist, dann ist $\mathbf{u}$ auch orthogonal zu jeder Linearkombination der $\mathbf{v}_i \in S$, weil folgendes gilt:

$$\mathbf{u}^T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = c_1\mathbf{u}^T\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}^T\mathbf{v}_k = c_1 \cdot 0 + \cdots + c_k \cdot 0 = 0.$$

$S^\perp$ ist ein Unterraum, da $S^\perp = \text{Span}(S)^\perp$ gilt und weil $\text{Span}(S)$ ein Unterraum ist, ist auch dessen orthogonales Komplement ein Unterraum (siehe letzte Übung).

Ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S^\perp$ muss $x+y+z=0$ erfüllen. Zwei linear unabhängige Vektoren, die diese Bedingung erfüllen, sind zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

daher bilden diese eine Basis von $S^\perp$. Etwas systematischer kann man natürlich auch eine Basis des Kerns der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bestimmen.

Aufgabe 2

1. Seien

$$\boldsymbol{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}\}$ eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Drücken Sie die Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

jeweils in dieser Basis $\mathcal{B}$ aus.

2. Seien

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\mathbf{v}_4$, so dass $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^4$ ist. Stellen Sie

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

in dieser Basis dar.

3. Seien

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\hat{y} = \mathrm{proj}_W(\mathbf{y})$ von $\mathbf{y}$ in den Unterraum W, der von $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ aufgespannt wird. Geben Sie $\hat{y}$ sowohl in der Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ von W als auch in der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ an. Fertigen Sie eine Skizze Ihrer Berechnungen an.

4. Seien

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Distanz von $\mathbf{y}$ zur von $\mathbf{u}_1$ erzeugten Gerade sowie die Distanz von $\mathbf{y}$ zu der von $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ aufgespannten Ebene.

5. Sei A eine $m \times n$ Matrix. Zeigen Sie, dass sich jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ zerlegen lässt in $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{u}$ mit $\boldsymbol{p}$ aus dem Zeilenraum $\mathrm{Row}(A)$ und $\boldsymbol{u}$ aus dem Kern $\ker(A)$.

Lösung:

1. (a) Wir rechnen nach, dass $\boldsymbol{b_1}^T\boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{b_1}^T\boldsymbol{b_3} = \boldsymbol{b_3}^T\boldsymbol{b_2} = 0$ gilt. Somit sind $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}$ linear unabhängig und $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(b) Mittels Satz der Vorlesung bestimmen wir die Koordinatenvektoren bezüglich der Basis $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 + \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_3^T\mathbf{b}_3}\mathbf{b}_3 = \frac{-1}{2}\mathbf{b}_1 + \frac{17}{3}\mathbf{b}_2 + \frac{-13}{6}\mathbf{b}_3 \\
\implies \quad [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{17}{3} \\ \frac{-13}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 \\ 34 \\ -13 \end{pmatrix} \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 + \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_3^T\mathbf{b}_3}\mathbf{b}_3 = \frac{5}{2}\mathbf{b}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{b}_2 + \frac{-1}{6}\mathbf{b}_3 \\
\implies \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Wir suchen einen Vektor $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, der auf $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ senkrecht steht. Dies liefert die Bedingungen $x + y = 0$, $z + w = 0$ und $x - y + z - w = 0$. Wir lösen das System:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \implies \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um $\mathbf{u}$ in dieser Basis darzustellen, berechnen wir

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3^T\mathbf{v}_3}\mathbf{v}_3 + \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{v}_4}{\mathbf{v}_4^T\mathbf{v}_4}\mathbf{v}_4 = \frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{7}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{-2}{4}\mathbf{v}_3 + \frac{0}{4}\mathbf{v}_4$$

$$\Rightarrow \quad [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Da $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ orthogonal sind, können wir wieder einen Satz der Vorlesung anwenden:

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{6}{3}\mathbf{u}_2$$

$$\implies \quad [\mathrm{proj}_W(\mathbf{y})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad [\mathrm{proj}_W(\mathbf{y})]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. Sei $L = \text{Span}(\mathbf{u}_1)$ und $P = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Wir berechnen die Distanzen als Länge der Projektionen ins orthogonale Komplement:

$$\text{dist}(\mathbf{y}, L) = \|\mathbf{y} - \text{proj}_L(\mathbf{y})\|, \qquad \text{dist}(\mathbf{y}, P) = \|\mathbf{y} - \text{proj}_P(\mathbf{y})\|$$

$$\text{proj}_L(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \frac{3}{5}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}$$

$$\implies \quad \text{dist}(\mathbf{y}, L) = \| \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} \| = \|\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}\| = \frac{1}{5}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

$$\text{proj}_L(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \frac{3}{5}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{9}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{45}\begin{pmatrix}17\\59\\10\end{pmatrix}$$

$$\implies \quad \text{dist}(\mathbf{y}, P) = \| \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{45}\begin{pmatrix}17\\59\\10\end{pmatrix} \| = \|\frac{1}{45}\begin{pmatrix}28\\-14\\35\end{pmatrix}\| = \frac{1}{45}\sqrt{28^2 + 14^2 + 35^2}$$

5. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $(\text{Row}(A))^\perp = \ker(A)$ gilt. Mit anderen Worten, jeder Vektor im Zeilenraum $\text{Row}(A)$ ist orthogonal zu jedem Vektor aus dem Kern $\ker(A)$. Laut Satz der Vorlesung können wir daher jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig zerlegen in die orthogonale Projektion in den Zeilenraum und den Kern:

$$\boldsymbol{p} := \text{proj}_{\text{Row}(A)}(\mathbf{x}) \qquad \boldsymbol{u} := \text{proj}_{\ker(A)}(\mathbf{x})$$

Somit gilt natürlich $\boldsymbol{p} \in \text{Row}(A)$ und $\boldsymbol{u} \in \ker(A)$ sowie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{u}$.

Aufgabe 3

1. Zeigen Sie, dass die Rotationsmatrix

$$R = \begin{bmatrix}\cos t & \sin t & 0\\ -\sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

wobei t eine beliebige reelle Zahl ist, orthogonal ist (d.h. $RR^T = I = R^TR$). Berechnen Sie $\det R$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von R und die zugehörigen Eigenvektoren.

2. Zeigen Sie, dass die Spiegelung

$$B = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

orthogonal ist. Berechnen Sie $\det B$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von B und die zugehörigen Eigenvektoren.

3. (a) Zeigen Sie, dass die Spalten der Matrix

$$A = \begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\\ 3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

eine orthogonale Menge bilden.

(b) Sei U die Matrix, die wir durch Normalisieren der Spalten von A erhalten. Ist UU^T eine Diagonalmatrix? Geben Sie ohne weitere Rechnung an, ob U^TU eine Diagonalmatrix ist.

(c) Sei

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Wir setzen $\boldsymbol{p} = UU^T\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/9 \\ -13/9 \\ -5/9 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p}$. Erklären Sie, warum $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Col}(A)$ gilt und zeigen Sie, dass $\boldsymbol{z}$ zu $\boldsymbol{p}$ und jeder Spalte von A orthogonal ist.

(d) Berechnen Sie die Distanz von $\boldsymbol{y}$ zu $\mathrm{Col}(A)$, d.h. $\|z\|$.

Lösung:

1. Wir rechnen $RR^T = I$ nach, d.h. $R^{-1} = R^T$. Ausserdem ist R eine orthogonale Matrix mit $\det R = 1$. Die Eigenwerte sind 1 und $\cos t \pm i \sin t$ mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Interessante Spezialfälle:

- Falls $t = 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ gilt, dann ist $R = I_3$. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist $\mathbb{R}^3$.
- Wenn $t = (2k+1)\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$, dann gilt $R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Die Eigenräume zu den Eigenwerte -1 bzw. 1 sind die von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene bzw. die durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugte Gerade.

2. Es gilt $BB^T = I$, und daher ist B eine orthogonale Matrix mit $\det B = -1$. Die Eigenwerte sind 1 (mit (algebraischer) Vielfachheit 2) und -1 mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ für } \lambda = 1, \text{ und } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ für } \lambda = -1.$$

3. (a) Es gilt $\boldsymbol{a_1}^T\boldsymbol{a_2} = 0$ und somit bilden die Spalten von A eine orthogonale Menge.

   (b) Wir teilen die Spalten von A durch ihre jeweilige Norm und erhalten

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{15} & -\sqrt{2}/2 \\ -2/\sqrt{15} & \sqrt{2}/3 \\ 3/\sqrt{15} & \sqrt{2}/3 \\ 1/\sqrt{15} & \sqrt{2}/6 \end{bmatrix}.$$

   Da $\boldsymbol{a_1}$ und $\boldsymbol{a_2}$ orthogonal sind, gilt dies auch für $\boldsymbol{u_1}$ und $\boldsymbol{u_2}$ und daher ist U^TU eine Diagonalmatrix.

Das Skalarprodukt der ersten beiden Zeilen von U ist $-7/15$; dieser Eintrag von UU^T ist $\neq 0$ und nicht auf der Diagonalen. Daher kann UU^T keine Diagonalmatrix sein.

(c)

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 7/9 \\ 4/9 \\ -4/9 \end{bmatrix}.$$

Es gilt $\boldsymbol{p} = UU^T\boldsymbol{y} = U(U^T\boldsymbol{y})$, und daher auch $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Col}(U)$. Nun sind die Spalten von U Vielfache der Spalten von A und somit ist $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Col}(A)$.
Wir rechnen $\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{p} = 0$ nach und $\boldsymbol{z}^T A = [0 \quad 0]$. Daraus folgt, dass $\boldsymbol{z}$ orthogonal zu jeder Spalte von A ist und daher $\boldsymbol{z} \in (\mathrm{Col}\, A)^\perp$ gilt.

(d) $\|\boldsymbol{z}\| = \sqrt{\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Wahr/Falsch
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.
Kapitel 6.1, 6.2 und 6.3

1. Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Wenn $\mathbf{u}$ orthogonal zu $\mathbf{v}$ ist und $\mathbf{v}$ orthogonal zu $\mathbf{w}$ ist, dann ist $\mathbf{u}$ nicht orthogonal zu $\mathbf{w}$.

2. Wenn die Distanz zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ gleich der Distanz zwischen $\mathbf{u}$ und $-\mathbf{v}$ ist, dann sind $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ orthogonal.

3. Für eine quadratische Matrix A sind die Vektoren des Spaltenraums $\mathrm{Col}(A)$ orthogonal zu den Vektoren des Kerns $\mathrm{Ker}(A)$.

4. Sei W ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Wenn $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ orthogonal zu jedem Vektor in einer Basis von W ist, dann gilt $\mathbf{x} \in W^\perp$.

5. Jede linear unabhängige Menge von Vektoren ist auch eine orthogonale Menge.

6. Nicht jede orthogonale Menge von Vektoren ist auch linear unabhängig.

7. Für eine $m \times n$ Matrix A mit orthonormalen Spalten und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Ax\| = \|x\|$.

8. Sei W ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Wenn $\boldsymbol{v}$ sowohl in W als auch in $W^\perp$ liegt, dann ist $\boldsymbol{v}$ der Nullvektor.

9. Sei A eine $n \times n$ Matrix. Die Spalten von A sind orthonormal (d.h. sie bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$) genau dann, wenn $\det(A) = 1$ gilt.

10. Wenn eine $m \times n$ Matrix A die Gleichung $AA^T = I_n$ erfüllt (I_n ist $n \times n$ Einheitsmatrix), dann gilt $m = n$.

Lösung: Kapitel 6.1, 6.2 und 6.3

1. F

2. W

3. F

4. W

5. F
6. W, denn die Menge, die nur den Nullvektor enthält, ist orthogonal, aber nicht linear unabhängig.
7. W
8. W
9. F
10. W. Aber: $AA^T = I_m$ (oder äquivalent $A^T A = I_n$) impliziert nicht $n = m$, denn für $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$