École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 11

Abgabe bis **01.12.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

1. Finden Sie eine rationale 2×2 Matrix $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, deren Eigenwerte irrational sind (d.h. in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen).

2. Finden Sie eine rationale 2×2 Matrix $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, die keine reellen Eigenwerte hat.

3. Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Diagonalisieren Sie die folgende Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Diagonalisieren Sie die folgende Matrix.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

hat Eigenwerte $\lambda_1 = \sqrt{2}$ und $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, denn

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}).$$

2. Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

hat nur komplexe Eigenwerte, denn das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2$$

hat keine Nullstellen über $\mathbb{R}$ (sondern nur über $\mathbb{C}$).

3. Für jede Matrix bestimmen wir das charakteristische Polynom und dessen Nullstellen. Falls die Nullstellen alle verschieden sind und es der Grösse der Matrix entsprechend viele gibt, dann ist die Matrix diagonalisierbar. Wenn nicht, müssen wir die Dimensionen der zugehörigen Eigenräume berechnen und überprüfen, ob sie mit der Vielfachheit der Nullstelle für das charakteristische Polynom übereinstimmen, um zu entscheiden, ob eine Matrix diagonalisierbar ist.

$$\det(M_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)$$

Da es zwei verschiedene Eigenwerte, nämlich 1 und 2, gibt, ist M_1 diagonalisierbar.

$$\det(M_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)$$

Analog ist M_2 diagonalisierbar, da sie 3 verschiedene Eigenwerte (nämlich 1,2,6) hat.

$$\det(M_3 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Die Nullstellen sind nicht verschieden (1 hat Vielfachheit 2). Daher bestimmen wir die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert 1. Um eine Basis dieses Eigenraums zu finden, bestimmen wir einfach den Kern $\ker(M_1 - 1 \cdot I)$ mit

$$M_3 - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also sind alle Lösungen von $(M_3 - I)\mathbf{x} = 0$ von der Form $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\ker(M_1 - 1 \cdot I)$. Somit hat der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 1$ Dimension 1, was weniger ist als die Vielfachheit von 1 als Nullstelle von $(1-\lambda)^2(2-\lambda)$. Daher ist M_3 nicht diagonalisierbar.

4. • **Bestimmung der Eigenwerte.**

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2$$

- **Berechnung von Basen der Eigenräume.**

$$A - \lambda_1 \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda_2 \cdot I = A - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Konstruktion einer Matrix P und einer Diagonalmatrix D, die zu A ähnlich ist.**

$$P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

- **Test, ob $AP = PD$ gilt.**

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5.
- **Bestimmung der Eigenwerte.**

$$\det(A - \lambda I) = (-2-\lambda)^2 (2-\lambda)^2 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 2$$

- **Berechnung von Basen der Eigenräume.**

$$A - \lambda_1 \cdot I = A - \lambda_2 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2s - 2t \\ s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda_3 \cdot I = A - \lambda_4 I = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Konstruktion einer Matrix P und einer Diagonalmatrix D, die zu A ähnlich ist.**

$$P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4] = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Test, ob $AP = PD$ gilt.**

$$AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

1. Bestimmen Sie über $\mathbb{C}$ die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie über $\mathbb{C}$ die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Finden Sie eine Matrix C von der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, die zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ähnlich ist, d.h. geben Sie eine invertierbare Matrix P an, so dass $A = PCP^{-1}$ gilt.

Lösung:

1.

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 5 \cdot (-2) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}(4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}) = 2 \pm 3i \ \Rightarrow\ \lambda_1 = 2 - 3i,\ \lambda_2 = 2 + 3i$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1+3i & 5 \\ -2 & 1+3i \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{-1+3i} \\ -2 & 1+3i \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{-1+3i} \\ 0 & (1+3i) + \frac{10}{-1+3i} \end{pmatrix}$$

Die Division kann man wie folgt ausrechnen:

$$\frac{1}{-1+3i} = a + bi \ \Rightarrow\ 1 = (-1+3i)(a+bi) = (-a-3b) + (3a-b)i$$

$$\Rightarrow\ (-a-3b)=1,(3a-b)=0\ \Rightarrow\ b=3a, a=\frac{-1}{10}\ \Rightarrow\ \frac{1}{-1+3i}=-\frac{1+3i}{10}$$

So

$$A-\lambda_1 I \iff \begin{pmatrix}1 & -\frac{1+3i}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}\frac{1+3i}{2}t\\ t\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}\frac{1+3i}{2}\\ 1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1+3i\\ 2\end{pmatrix}$$

Wir überprüfen, ob v_1 wirklich ein Eigenvektor ist:

$$A\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+3i}{2}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11+3i\\ 4-6i\end{pmatrix}=(2-3i)\begin{pmatrix}1+3i\\ 2\end{pmatrix},$$

mit Nebenrechnung $(2-3i)(1+3i)=11+3i$.

An dieser Stelle könnten wir $\mathbf{v}_2$ analog ausrechnen, aber für ein Paar von komplex konjugierten Eigenwerten ($a+bi$ und $a-bi$) sind die Eigenvektoren auch konjugiert zueinander, das heisst

$$\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1-3i\\ 2\end{pmatrix}.$$

2. Wir entwickeln nach der dritten Zeile.

$$\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 3\\ -1 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2+1)=(1-\lambda)(\lambda-i)(\lambda+i)$$

$$\Rightarrow\quad \lambda_1=1,\quad \lambda_2=i,\quad \lambda_3=-i$$

$$B-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}2t\\ -t\\ t\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

Im Folgenden nutzen wir $\frac{1}{i}=-i$, denn es gilt $(-i)\cdot i=-i^2=-(-1)=1$.

$$B-\lambda_2 I=\begin{pmatrix}-i & 1 & 3\\ -1 & -i & 1\\ 0 & 0 & 1-i\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{-i} & \frac{3}{-i}\\ -1 & -i & 1\\ 0 & 0 & 1-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & i & 3i\\ -1 & -i & 1\\ 0 & 0 & 1-i\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{pmatrix}1 & i & 3i\\ 0 & 0 & 1+3i\\ 0 & 0 & 1-i\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1 & i & 3i\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1 & i & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}-it\\ t\\ 0\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}-i\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}-i\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}i\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

3.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+5$$

$$\Rightarrow\quad \lambda=\frac{1}{2}(4\pm\sqrt{16-20})=2\pm i\quad\Rightarrow\quad \lambda_1=2+i,\quad \lambda_2=2-i$$

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}-1-i & -2\\ 1 & 1-i\end{pmatrix}$$

Anstelle der üblichen Zeilenumformungen nutzen wir den folgenden Trick für 2×2 Matrizen. Da wir wissen, dass diese Matrix einen nichttrivialen Kern hat, gibt es einen Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, so dass $1 \cdot x + (1-i)y = 0$ gilt und damit gilt $x = (-1+i)y$ und

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen nun wie in der Vorlesung

$$P = [\mathrm{Re}(\mathbf{v}_1) \ \ \mathrm{Im}(\mathbf{v}_1)] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\lambda_1) & \mathrm{Im}(\lambda_1) \\ -\mathrm{Im}(\lambda_1) & \mathrm{Re}(\lambda_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

dann sollte $P^{-1}AP = C$ wie gesucht gelten. Wir überprüfen:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{(-1)\cdot 0 - 1 \cdot 1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = C \end{aligned}$$

Aufgabe 3

1. Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die durch
$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 15x + 4y + 3z \\ -8x + 10z \\ 6x + 2y + 6z \end{pmatrix}$$
beschriebene lineare Abbildung und seien
$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad \mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$
zwei Basen von $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Matrix M an, so dass gilt $[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = M \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

2. Bestimmen Sie eine Basis, bezüglich der die folgende lineare Abbildung durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.
$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5x - 3y \\ y - 7x \end{pmatrix}$$

3. Wir betrachten die lineare Abbildung T mit Standardmatrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Finden Sie eine Basis, bezüglich der T durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

Lösung:

1. Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}$ die Standardbasis. Die Standardmatrix von T (d.h. bzgl. $\mathcal{E}$) ist
$$A = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 3 \\ -8 & 0 & 10 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten, $[T(\mathbf{v})]_\mathcal{E} = A \cdot [\mathbf{v}]_\mathcal{E}$. Sei nun $\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{E}$, und analog sei $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}{P}$ die Basiswechselmatrix von $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{C}$. Wir erhalten

$$[\mathbf{v}]_\mathcal{E} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} \cdot [\mathbf{v}]_\mathcal{B}, \qquad [\mathbf{v}]_\mathcal{C} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}{P} \cdot [\mathbf{v}]_\mathcal{E}.$$

Damit gilt

$$M = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{[T]} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}{P} \cdot A \cdot \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P},$$

denn

$$M \cdot [\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}{P} \cdot A \cdot \left(\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[\mathbf{v}]_\mathcal{B}\right) = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}{P} \cdot (A \cdot [\mathbf{v}]_\mathcal{E}) = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}{P} \cdot [T(\mathbf{v})]_\mathcal{E} = [T(\mathbf{v})]_\mathcal{C},$$

ist was wir wollten. (Auch wenn dies auf den ersten Blick sehr kompliziert erscheint, wird es viel leichter und all die Notation nicht mehr nötig sein, sobald man sich einmal daran gewöhnt hat.)

Es bleiben die Basiswechselmatrizen zu bestimmen, um dann die Matrix M durch Ausmultiplizieren zu erhalten. Wie schon letzte Woche gesehen ist die Basiswechselmatrix in die Standardmatrix sehr einfach zu bestimmen, da sie sich aus den Basisvektoren der Basis $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ (in der Standardmatrix) als Spalten zusammensetzt:

$$\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir invertieren die zweite Matrix, um $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{C}}$ zu erhalten:

$$\left[\begin{array}{cccccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\implies \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}{P} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Und damit gilt:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 4 & 3 \\ -8 & 0 & 10 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 19 & 7 \\ -8 & -8 & 10 \\ 6 & 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -4 & -4 & 5 \\ 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Die Standardmatrix von T ist

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir müssen diese Matrix mit den üblichen Schritten diagonalisieren und erhalten dadurch eine Basis aus Eigenvektoren bezüglich derer die Abbildung T durch eine Diagonalmatrix (mit den Eigenwerten auf der Diagonalen) beschrieben wird.

- **Bestimmung der Eigenwerte.**

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -7 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda) - (-3)(-7) = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = (\lambda+2)(\lambda-8)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 8$$

- **Berechnung von Basen der Eigenräume.**

$$A - \lambda_1 \cdot I = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}t \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{7}t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda_2 \cdot I = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -7 & -7 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Konstruktion einer Matrix P und einer Diagonalmatrix D, die zu A ähnlich ist.**

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

- **Test, ob $AP = PD$ gilt.**

$$AP = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}$$

Die Spalten der Matrix P bilden eine Basis $\mathcal{B}$ aus Eigenvektoren von A. Unter Zuhilfenahme der Notation aus Teil (i) gilt $P = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ und $P^{-1} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P}$. Somit folgt

$$D = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}{[T]} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P} \cdot A \cdot \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = P^{-1}AP$$

3. Wir gehen analog zu Teil (ii) vor.

- **Bestimmung der Eigenwerte.**

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5)$$

Um dieses Polynom in Linearfaktoren zu zerlegen verwenden wir den folgenden Trick: Jede ganzzahlige Nullstelle muss den letzten Term 5 teilen. Also können wir ausprobieren, ob ein Teiler von 5, das heisst 1 oder 5, eine Nullstelle ist und wir finden heraus, dass sogar beide eine Nullstelle sind. Wir erhalten

$$-(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5) = -(\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda - a),$$

wobei a die dritte Nullstelle bezeichnet. Der letzte Term des Produkts ist $-(-1)\cdot(-5)\cdot a = -5a$, der -5 ergeben muss, und damit gilt $a = 1$, somit

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 5)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1.$$

Es kann auch Polynomdivision genutzt werden, ob das Polynom zu zerlegen.

- **Berechnung der Basen der Eigenräume.**

$$A - \lambda_1 \cdot I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda_2 \cdot I = A - \lambda_3 \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Konstruktion einer Matrix P und einer Diagonalmatrix D, die zu A ähnlich ist.**

$$P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Test, ob $AP = PD$ gilt.**

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Sei V ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Beweisen sie, dass dann auch $V^\perp$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

Lösung: Wir führen den Beweis durch Nachrechnen der Eigenschaften eines Unterraums.
Nullvektor: Natürlich ist $0 \in V^\perp$ da für alle $v \in V$ gilt $0 \cdot v = 0$.
Abgeschlossen unter Addition:
Sei $p, q \in V^\perp$ dann gilt für alle $v \in V$, dass $p \cdot v = 0 = q \cdot v$. Damit gilt also auch $(p+q) \cdot v = p \cdot v + q \cdot v = 0 + 0 = 0$. Also ist auch $(p+q) \in V^\perp$.
Abgeschlossen unter Skalarmultiplikation:
Sei $p \in V^\perp$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Nun gilt für alle $v \in V$ das $p \cdot v = 0$. Damit gilt aber auch $(\alpha p) \cdot v = \alpha(p \cdot v) = \alpha 0 = 0$. Somit ist also auch $(\alpha p) \in V^\perp$.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 5.3, 5.4 und 5.5 Im Folgenden bezeichnet A eine $n \times n$ Matrix.

1. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A sind linear unabhängig.
2. Die Summe zweier Eigenvektoren von A ist wieder ein Eigenvektor von A.
3. Wenn A invertierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
4. Wenn A nicht invertierbar ist, dann ist A auch nicht diagonalisierbar.

5. Wenn A weniger als n verschiedene Eigenwerte hat, dann ist A nicht diagonalisierbar.
6. Jeder Eigenvektor einer invertierbaren Matrix A ist auch ein Eigenvektor von A^{-1}.

Lösung: Kapitel 5.3, 5.4 und 5.5

1. W
2. F
3. F
4. F
5. F
6. W