École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 11

Abgabe bis **01.12.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

1. Finden Sie eine rationale 2×2 Matrix $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, deren Eigenwerte irrational sind (d.h. in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen).

2. Finden Sie eine rationale 2×2 Matrix $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, die keine reellen Eigenwerte hat.

3. Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Diagonalisieren Sie die folgende Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Diagonalisieren Sie die folgende Matrix.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

1. Bestimmen Sie über $\mathbb{C}$ die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie über $\mathbb{C}$ die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Finden Sie eine Matrix C von der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, die zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ähnlich ist, d.h. geben Sie eine invertierbare Matrix P an, so dass $A = PCP^{-1}$ gilt.

Aufgabe 3

1. Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 15x + 4y + 3z \\ -8x + 10z \\ 6x + 2y + 6z \end{pmatrix}$$

beschriebene lineare Abbildung und seien

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}, \quad \mathcal{C} = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

zwei Basen von $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Matrix M an, so dass gilt $[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = M \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

2. Bestimmen Sie eine Basis, bezüglich der die folgende lineare Abbildung durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5x - 3y \\ y - 7x \end{pmatrix}$$

3. Wir betrachten die lineare Abbildung T mit Standardmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Basis, bezüglich der T durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

Aufgabe 4

Sei V ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Beweisen sie, dass dann auch $V^\perp$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 5.3, 5.4 und 5.5 Im Folgenden bezeichnet A eine $n \times n$ Matrix.

1. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A sind linear unabhängig.
2. Die Summe zweier Eigenvektoren von A ist wieder ein Eigenvektor von A.
3. Wenn A invertierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
4. Wenn A nicht invertierbar ist, dann ist A auch nicht diagonalisierbar.
5. Wenn A weniger als n verschiedene Eigenwerte hat, dann ist A nicht diagonalisierbar.
6. Jeder Eigenvektor einer invertierbaren Matrix A ist auch ein Eigenvektor von A^{-1}.