École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 10

Abgabe bis **24.11.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

1. Weisen Sie nach, dass $\lambda = 4$ ein Eigenwert der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$
ist. Finden Sie einen Eigenvektor zu diesem Eigenwert.

2. Ist $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$?

3. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension für den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 3$ der Matrix
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

1. Wir finden eine Zeilenstufenform von $A - 4I$:
$$\begin{pmatrix} 3-4 & 0 & -1 \\ 2 & 3-4 & 1 \\ -3 & 4 & 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \quad z \text{ freie Variable, } x = -z, y = -z \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Damit sollte $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor sein, da $(A - 4I)\mathbf{v} = 0$, und tatsächlich gilt auch
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Wir überprüfen:
$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Daraus folgt, dass es in der Tat ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist.

3. Wir müssen eine Basis von $\ker(B-3I)$ finden:
$$\begin{pmatrix} 4-3 & 2 & 3 \\ -1 & 1-3 & -3 \\ 2 & 4 & 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Wir lesen ab, dass $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis ist. Damit ist die Dimension des Eigenraums 2.

Aufgabe 2

1. Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren für die Matrizen
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte von
$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
und geben Sie jeweils einen Eigenvektor an.

Lösung:

1. Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:
$$\det(C-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) - 1 \cdot 1$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-2)(\lambda-4),$$
und daher sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$ die Eigenwerte von C.
Als nächstes bestimmen wir eine Zeilenstufenform von $B-2I$ und $B-4I$, um die Eigenvektoren zu finden:
$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann tun wir das Gleiche auch für D:

$$\det(D - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda) - 4\cdot(-1) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2,$$

also ist $\lambda = 3$ der einzige Eigenwert. Danach finden wir einen Eigenvektor dazu:

$$\begin{pmatrix} 5-3 & 4 \\ -1 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Als Erstes berechnen wir wieder die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\det(E - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4-\lambda \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 2;$$

Einen Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ erhalten wir durch:

$$E - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1-(-1) & 0 & 1 \\ -3 & 4-(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Analog erhalten wir einen Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ durch:

$$E - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -1-4 & 0 & 1 \\ -3 & 4-4 & 0 \\ 0 & 0 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Und schliesslich einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$:

$$E - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -1-2 & 0 & 1 \\ -3 & 4-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t \\ \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

1. Sei A eine $n \times n$ Matrix mit n reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ (entsprechend ihrer Vielfachheiten, nicht notwendigerweise verschieden). Zeigen Sie, dass $\det A$ das Produkt der n Eigenwerte von A ist.

2. Zeigen Sie für zwei $n \times n$ Matrizen A und B, dass AB und BA die gleichen Eigenwerte haben.

3. Zeigen Sie, dass wenn λ ein Eigenwert einer invertierbaren Matrix A ist, dann ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}.

4. Zeigen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenwerte haben für eine $n \times n$ Matrix A.

Lösung:

1. Das charakteristische Polynom von A ist $P(x) = \det(A - xI)$. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Somit erhält man eine alternative Darstellung

$$P(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \dots (\lambda_n - x).$$

Diese Identität gilt insbesondere für alle x und somit auch für $x = 0$. Man erhält

$$P(0) = \det(A - 0I) = \det(A) = (\lambda_1 - 0) \dots (\lambda_n - 0) = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

2. Wir bemerken zunächst, dass es aus Symmetriegründen ausreicht zu zeigen, dass wenn λ ein Eigenwert von AB ist, dann ist λ auch ein Eigenwert von BA. Denn sobald diese Aussage gezeigt ist, folgt die Gegenrichtung durch Vertauschen der Rollen von A und B.

   Wir unterscheiden zwei Fälle:

   - $\lambda = 0$.
     $\lambda = 0$ ist ein Eigenwert von AB genau dann wenn $\det(AB) = 0$. Da $\det(BA) = \det B \det A = \det A \det B = \det(AB)$, folgt somit auch $\det(BA) = 0$ und dies ist wiederum genau dann korrekt, wenn $\lambda = 0$ ein Eigenwert von BA ist.
   - $\lambda \neq 0$.
     Wenn $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von AB ist, dann existiert ein Eigenvektor $v \neq 0$, so dass $ABv = \lambda v$ gilt. Wir können sofort sehen, dass $Bv \neq 0$ (ansonsten wäre $ABv = A0 = 0 \neq \lambda v$ da $\lambda \neq 0$ und $v \neq 0$). Nun gilt

     $$BA(Bv) = BABv = B(ABv) = B(\lambda v) = \lambda Bv = \lambda(Bv).$$

     Da nun $Bv \neq 0$ bedeutet das, dass Bv ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist für die Matrix BA. Somit ist λ auch ein Eigenwert von BA (zum Eigenvektor Bv).

3. Wenn λ ein Eigenwert von A ist, dann gibt es einen Eigenvektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mit $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Daraus folgern wir

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x} \Rightarrow A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}.$$

Das bedeutet, dass $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1} ist (zum Eigenvektor $\mathbf{x}$).

4. Wegen $\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T$ und $I = I^T$ gilt $\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)$. Daher sind die charakteristischen Polynome von A und A^T gleich und diese beide Matrizen haben die gleichen Eigenwerte.

Wahr/Falsch
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.
Kapitel 5.1 und 5.2

1. Eine $n \times n$ Matrix A ist nicht invertierbar genau dann, wenn 0 ein Eigenwert von A ist.

2. Wenn $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren einer Matrix sind, dann sind die zugehörigen Eigenwerte verschieden.

3. Die Eigenwerte einer Matrix sind deren Diagonaleinträge.

4. Wenn zwei $n \times n$ Matrizen A und B zeilenäquivalent sind, dann haben sie die gleichen Eigenwerte.

Lösung: Kapitel 5.1 und 5.2

1. W

2. F

3. F

4. F