École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 10

Abgabe bis **24.11.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

1. Weisen Sie nach, dass $\lambda = 4$ ein Eigenwert der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$
ist. Finden Sie einen Eigenvektor zu diesem Eigenwert.
2. Ist $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$?
3. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension für den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 3$ der Matrix
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

1. Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren für die Matrizen
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Bestimmen Sie die Eigenwerte von
$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
und geben Sie jeweils einen Eigenvektor an.

Aufgabe 3

1. Sei A eine $n \times n$ Matrix mit n reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ (entsprechend ihrer Vielfachheiten, nicht notwendigerweise verschieden). Zeigen Sie, dass $\det A$ das Produkt der n Eigenwerte von A ist.

2. Zeigen Sie für zwei $n \times n$ Matrizen A und B, dass AB und BA die gleichen Eigenwerte haben.

3. Zeigen Sie, dass wenn λ ein Eigenwert einer invertierbaren Matrix A ist, dann ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}.

4. Zeigen, dass A und A^T die gleichen Eigenwerte haben für eine $n \times n$ Matrix A.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 5.1 und 5.2

1. Eine $n \times n$ Matrix A ist nicht invertierbar genau dann, wenn 0 ein Eigenwert von A ist.

2. Wenn $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren einer Matrix sind, dann sind die zugehörigen Eigenwerte verschieden.

3. Die Eigenwerte einer Matrix sind deren Diagonaleinträge.

4. Wenn zwei $n \times n$ Matrizen A und B zeilenäquivalent sind, dann haben sie die gleichen Eigenwerte.