École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 9

Abgabe bis **17.11.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Am Donnerstag, 13.11., haben Sie die Möglichkeit innerhalb der Übungsstunde eine Probeklausur zu bearbeiten und anschliessend zur Korrektur abzugeben!

Aufgabe 1

Gibt es einen reellen Vektorraum mit genau zwei Elementen? Geben Sie entweder ein Beispiel an oder beweisen Sie, dass es keinen solchen Vektorraum gibt.

Hinweis: Benutzen Sie die Eigenschaften eines reellen Vektorraumes. Insbesondere sei "+" die Addition von Elementen des Vektorraums, "·" die Multiplikation mit Skalaren und $\mathbf{0}$ das Nullelement im Vektorraum bzgl. Addition. Dann gilt

- zu jedem v im Vektorraum gibt es ein additiv inverses Element u, sodass $v + u = \mathbf{0}$,
- für jedes v im Vektorraum gilt $v + \mathbf{0} = v$,
- für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Lösung: Wir beweisen, dass es keinen reellen Vektorraum mit genau zwei Elementen gibt mittels Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir also an, es gäbe einen solchen Vektorraum.
Zunächst bezeichnen wir mit z das Nullelement (zero) im Vektorraum (dieses ist per Definition enthalten). Wir bezeichnen das andere Element mit o. Nun gilt

$$2 \cdot o = 1 \cdot o + 1 \cdot o = o + o = z$$

Die erste Gleichung folgt wegen Distributivität der Skalarmultiplikation. Die zweite Gleichung folgt, da im reellen Vektorraum $1 \cdot v = v$ fuer jedes Element v (1 ist neutrales Element bzgl. Skalarmultiplikation). Wir zeigen wieso auch die dritte Gleichung folgt. Angenommen $o + o = o$, dann ergibt Addition auf beiden Seiten mit dem Inversen von o, dass $o = z$. Dann hat der Vektorraum aber nur genau ein Element, was ein Widerspruch ist.
Nun gilt weiterhin

$$o = 1 \cdot o = (2^{-1}\, 2) \cdot o = 2^{-1} \cdot (2 \cdot o) = 2^{-1} \cdot z = z.$$

Die erste Gleichung folgt wieder wegen der Neutralität der 1 bzgl. Skalarmultiplikation. Die dritte Gleichung wegen Assoziativität der Skalarmultiplikation. Die vierte Gleichung folgt von oben und die letzte Gleichung, da $\alpha \cdot z = z$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir erhalten also $o = z$ was im Widerspruch zur Annahme steht.

Aufgabe 2

1. Für :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

bezeichnen wir mit $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{x}$ bezüglich dieser Basis.

   1. Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{x}$ (das heisst seine Koordinaten bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$).
   2. Finden Sie den Koordinatenvektor $[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}}$ von

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Seien $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\}$ und $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}\}$ zwei Basen eines Vektorraums V. Angenommen, es gilt $\boldsymbol{b_1} = 6\boldsymbol{c_1} - 2\boldsymbol{c_2}$ und $\boldsymbol{b_2} = 9\boldsymbol{c_1} - 4\boldsymbol{c_2}$.

   (a) Finden Sie die Basiswechselmatrizen $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ und $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$.

   (b) Finden Sie $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}}$ für $\boldsymbol{x} = -3\boldsymbol{b_1} + 2\boldsymbol{b_2}$ mit Hilfe von (a).

3. Betrachten Sie die folgenden Basen von $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}, \qquad \mathcal{C} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Finden Sie die Basiswechselmatrizen $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ und $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$. Bestimmen Sie dann $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ für

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

4. Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$T(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ 10x_1 - 8x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Geben Sie die Standardmatrix von T bezüglich der Basen $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{C} = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ von $\mathbb{R}^3$ an.

Lösung:

1. 1. Der Koordinatenvektor $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ von $\boldsymbol{x}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ sind die Koeffizienten der Darstellung von $\boldsymbol{x}$ als Linearkombination der Basisvektoren $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ und $\boldsymbol{b}_3$. Folglich gilt $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$. Ausserdem gilt $\boldsymbol{x} = P_{\mathcal{B}}\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ wobei $P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & -7 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ zur Standardbasis bezeichnet.

2. Wir haben $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}$ in der Standardbasis. Um den Koordinatenvektor von $\boldsymbol{y}$ bezüglich $\mathcal{B}$ zu finden, den wir mit $[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ bezeichnen, suchen wir y_1, y_2 und y_3, so dass $y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2 + y_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{y}$ gilt. Es gilt $\boldsymbol{y} = P_{\mathcal{B}}\,[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}}$ und daher $[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\,\boldsymbol{y}$. Durch Berechnung der Inversen von $P_{\mathcal{B}}$ (oder durch Lösen des obigen GLS) erhalten wir $[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. (a) Die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ ist die Matrix, deren Spalten die Koordinatenvektoren der Basis $\mathcal{B}$ bezüglich der Basis $\mathcal{C}$ sind:

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Die Basiswechselmatrix $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ ist die Inverse von $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$:

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(b) Die Gleichung $\boldsymbol{x} = -3\boldsymbol{b_1} + 2\boldsymbol{b_2}$ impliziert $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Um $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}}$ zu bestimmen, reicht es daher aus, die Basiswechselmatrix $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ zu benutzen:

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3. Die Basiswechselmatrizen können elementare Zeilenoperationen bestimmt werden (wobei B und C die Matrizen mit Spalten aus $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ in der angegebenen Reihenfolge bezeichnen):

$$[\ C \mid B\ ] \Longleftrightarrow \left[\ I \mid \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\right]$$
$$[\ B \mid C\ ] \Longleftrightarrow \left[\ I \mid \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}\right]$$

Erklärung: Diese Reduktion löst die Gleichungssysteme $C\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$ für alle i gleichzeitig (wobei $\mathbf{b}_i$ die i-te Vektor von $\mathcal{B}$ bezeichnet) bzw. $B\mathbf{y}_i = \mathbf{c}_i$. In dieser Notation sind die Spalten von $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ gerade die $\mathbf{x}_i$, d.h. es gilt $B = C\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ und analog sind die Spalten von $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ eben die $\mathbf{y}_i$. Damit erhalten wir für einen Vektor $\mathbf{w}$ (bzgl der Standardbasis)

$$\mathbf{w} = B\cdot[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = C\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\cdot[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = C\cdot\left(\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}\right) = C[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}.$$

Und nun führen wir diese Reduktionen aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Etwas formaler können wir mit Hilfe der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^3$ auch argumentieren, dass $B = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ und $C = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ gilt, da die Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ja bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ gegeben sind. Damit gilt

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}{P} \cdot \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = C^{-1}B \quad \text{und}$$
$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P} \cdot \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = B^{-1}C$$

Um nun $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ zu berechnen, müssen wir nur mit der entsprechenden Basiswechselmatrix multiplizieren:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um dies zu überprüfen, vergleichen wir einfach die Darstellung von $\mathbf{v}$ in der Standardbasis $\mathcal{E}$:

$$\mathbf{v} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = B[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = 1 \cdot \mathbf{b}_1 + 1 \cdot \mathbf{b}_2 + 1 \cdot \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{v} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}{P}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = C[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = 1 \cdot \mathbf{c}_1 + 0 \cdot \mathbf{c}_2 + 1 \cdot \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Da $\mathcal{B}$ die Standardbasis ist, können wir sie praktisch ignorieren. In der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist die (Standard-)Matrix von T

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & -8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir möchten nun eine Matrix D finden, so dass $D \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$ bzw. $D\mathbf{v} = [A\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ gilt, was äquivalent dazu ist. Es bezeichne $\mathcal{E}$ die Standardmatrix von $\mathbb{R}^3$. Wegen

$$[A\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}{P} \cdot [A\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}{P} A\mathbf{v},$$

ist $D = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}{P} A = \left(\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}{P}\right)^{-1} A$ die gesuchte Matrix. Nun ist $\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ aber gerade die Matrix, deren Spalten die Koordinatenvektoren von $\mathcal{C}$ sind, und daher müssen wir sie nur invertieren und mit A multiplizieren, um D zu bestimmen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$D = \left(\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}{P}\right)^{-1} A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & -8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

1. Wir betrachten die Basis $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ von $\mathbb{P}_2$ mit
$$p_1(t) = 1 + t + t^2, \quad p_2(t) = 2t - t^2, \quad p_3(t) = 2 + t - t^2.$$
Bestimmen Sie $[t]_\mathcal{B}$ und $[1 + t^2]_\mathcal{B}$.

2. Sei $\psi : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ die durch $\psi(p)(t) = p(t + 1)$ definierte Abbildung. Zeigen Sie, dass ψ linear ist. Bestimmen Sie die Matrix von ψ in der Standardbasis $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ und bezüglich der Basis $\mathcal{C} = \{1 - t, 2 - t, 1 + t^2\}$.

Lösung:

1. Wir wenden elementare Zeilenoperationen auf der erweiterten Koeffizientenmatrix (deren Spalten die Koeffizienten der Polynome sind) an. Um den Vorgang zu beschleunigen, führen wir sie gleichzeitig für beide gesuchten Koordinatenvektoren (die vierte Spalte gehört zu t und die fünfte Spalte zu $1 + t^2$):
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$
$$\Longrightarrow \quad [t]_\mathcal{B} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad [1 + t^2]_\mathcal{B} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Zunächst schreiben wir aus, was diese Abbildung tut:
$$\psi(a + bt + ct^2) = a + b(t + 1) + c(t + 1)^2 = (a + b + c) + (b + 2c)t + ct^2.$$
Somit ist die Matrix von ψ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
da, wenn wir den Koeffizientenvektor der Polynome betrachten, folgendes erhalten:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c \\ b + 2c \\ c \end{pmatrix}.$$
Die Matrix $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ hat als Spalten die Koeffizientenvektoren der Polynome in $\mathcal{C}$:
$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Die Matrix D von ψ in der Basis $\mathcal{C}$ erfüllt
$$D \cdot [p]_\mathcal{C} = [\psi(p)]_\mathcal{C},$$

und daher setzen wir

$$D = \left(\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}\right)^{-1} A \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P},$$

weil damit gilt

$$D \cdot [p]_{\mathcal{C}} = \left(\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}\right)^{-1} A \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} [p]_{\mathcal{C}} = \left(\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}\right)^{-1} A [p]_{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} [\psi(p)]_{\mathcal{B}} = [\psi(p)]_{\mathcal{C}}.$$

Wir bestimmen die Inverse von $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ und multiplizieren dann aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wahr/Falsch
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.
Kapitel 4.3, 4.4, 4.5

1. Die Menge mit genau einem Vektor ist linear unabhängig.
2. Wenn $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_p) = V$ gilt, dann ist eine Teilmenge von $\{v_1, \dots, v_p\}$ eine Basis von V.
3. Die Dimension von $\mathbb{P}_n$ ist n.
4. Der einzige Unterraum H von $\mathbb{R}^3$ mit $\dim(H) = 3$ ist $\mathbb{R}^3$.

Kapitel 4.6 & 4.7
Im Folgenden bezeichnet A eine $m \times n$ Matrix.

1. $\operatorname{Row}(A) = \operatorname{Col}(A)$
2. $\dim \operatorname{Row}(A) = \dim \operatorname{Col}(A)$
3. $\operatorname{Row}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$.
4. $\dim \operatorname{Row}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = n$
5. Es gibt eine 6×9 Matrix B so dass $\dim \operatorname{Ker}(B) = 2$ gilt.
6. Für zwei Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ eines Vektorraums V sind die Spalten von $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ linear unabhängig.

Lösung: Kapitel 4.3, 4.4, 4.5

1. F
2. W
3. F
4. W

Kapitel 4.6 & 4.7

1. F
2. W
3. F
4. W
5. F
6. W