École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 8

Abgabe bis **10.11.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass man eine $n \times n$ Matrix mit vollem Zeilenrang alleine durch Operationen der Form "ersetze eine Zeile durch die Summe von sich selbst und einem Vielfachen einer anderen Zeile" in eine Diagonalmatrix umformen kann.

Lösung: Diesen Sachverhalt kann man auf verschiedene Weisen beweisen. Wir benutzen hier z.B. vollständige Induktion über n.
Induktionsanfang: Jede 1×1 Matrix ist eine Diagonalmatrix. Hier sind also keine Umformungen mehr nötig.
Induktionsvoraussetzung: Jede $(n-1) \times (n-1)$ Matrix mit vollem Zeilenrang lässt sich mittels obiger Operation in eine Diagonalmatrix umformen.
Induktionsschritt: Sei A eine $n \times n$ Matrix mit Zeilen $a_1, \dots, a_n$. Zuerst sorgen wir dafür, dass $a_{1,1} \neq 0$. Entweder dies ist schon der Fall, dann ist nichts mehr zu tun. Oder $a_{1,1} = 0$. Dann existiert aber wegen vollem Zeilenrang der Matrix A ein j, sodass $a_{j,1} \neq 0$. Wir addieren a_j auf a_1.
Nun machen wir $(n-1)$ Umformungen:
Addiere $-\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} \cdot a_1$ auf a_i für $i = 2, \dots, n$ ($a_{i,1}$ ist die erste Komponente von a_i). Dies sorgt dafür, dass die erste Spalte der Matrix der Vektor $(a_{1,1}, 0, \dots, 0)^\top$ wird. Nun hat die Matrix die Form

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & & A' & \end{pmatrix}$$

wobei A' eine $(n-1) \times (n-1)$ Matrix ist. Da A vollen Zeilenrang hat, d.h. die Zeilen von A sind linear unabhängig, sind auch die Zeilen von A' linear unabhängig (wir haben nur zu jeder Zeile ein Vielfaches von a_1 hinzu addiert; formal kann man dies auch über die Anzahl der Pivotelemente sehen). Damit können wir die Induktionsvoraussetzung benutzen. Es gibt also Umformungen die A' in eine $(n-1) \times (n-1)$ Diagonalmatrix D' umformen. Diese Umformungen lassen aber insbesondere die erste Spalte und erste Zeile von A unverändert!
Wir erhalten also die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & d'_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d'_{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Nun machen wir erneut $(n-1)$ Umformungen des obigen Typs:
Addiere $-\frac{a_{1,i}}{d'_{i-1}} \cdot (0, \dots, 0, d_{i-1}, 0 \dots, 0)$ auf a_1. Wir erhalten die gewünschte Diagonalmatrix.

Aufgabe 2

1. Sei $\mathbb{P}_3$ der Vektorraum der Polynome in einer Variablen mit Grad höchstens 3. Bestimmen Sie welche der folgenden Mengen ein Unterraum von $\mathbb{P}_3$ ist :

   a. Die Menge der Polynome der Form $p(t) = at$ wobei a eine beliebige reelle Zahl ist.

   b. Die Menge der Polynome der Form $p(t) = a + t^2$ wobei a eine beliebige reelle Zahl ist.

   c. Die Menge der Polynome der Form $p(t) = c_1t^3 + c_2t^2 + c_3t + c_4$, wobei c_1, c_2, c_3 und c_4 beliebige ganze Zahlen sind.

   d. Die Menge aller Polynome in $\mathbb{P}_3$, die $p(0) = 0$ erfüllen.

   e. Die Menge aller Polynome in $\mathbb{P}_3$, die $p(0) = 1$ erfüllen.

   f. Die Menge aller Polynome in $\mathbb{P}_3$, die $p(1) = 0$ erfüllen.

2. Sei $V = \mathbb{R}_{>0}$ die Menge aller *positiven* reellen Zahlen. Wir definieren die Addition $\oplus$ in V durch $x \oplus y = xy$ für alle $x, y \in V$, und definieren die Skalarmultiplikation $\otimes$ durch $c \otimes x = x^c$ für alle $x \in V$ und $c \in \mathbb{R}$. Verifizieren Sie, dass V mit dieser Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist.

3. Sei $\mathbb{P}_3$ der Vektorraum der Polynome mit Grad höchstens 3. Sei S der durch
$$p_1(t) = 1 + t^2, p_2(t) = 3t + 4t^3, p_3(t) = 1 + t + 5t^2 + 4t^3$$
erzeugte Unterraum. Gilt $1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 \in S$?

4. Sei $S \subset \mathbb{R}^4$ die Menge aller Vektoren $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$, die $x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$, $x_2 + 3x_3 = 0$, und $x_1 - x_4 = 0$ erfüllen. Zeigen Sie, dass S ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Finden Sie eine Basis von S und bestimmen Sie $dim(S)$.

5. Sei V ein Vektorraum und seien S und T Unterräume von V . Wir definieren deren Summe $S + T$ als Menge
$$S + T = \{s + t \colon s \in S, t \in T\}.$$
Zeigen Sie, dass $S + T$ ein Unterraum von V ist.

Lösung:

1. a) Diese Menge ist gerade span(p) für das Polynom $p(t) = t$ und daher ein Unterraum von $\mathbb{P}_3$.

   b) Diese Menge ist kein Unterraum von $\mathbb{P}_3$, da zum Beispiel der Nullvektor (das Nullpolynom) nicht enthalten ist.

   c) Die Menge aller Polynome der Form $p(t) = c_1t^3 + c_2t^2 + c_3t + c_4$, wobei c_1, c_2, c_3 und c_4 beliebige ganze Zahlen sind, ist kein Unterraum von $\mathbb{P}_3$, da die Menge bezüglich der Skalarmultiplikation nicht abgeschlossen ist. Wenn zum Beispiel eines der Polynome mit $\sqrt{2}$ multipliziert wird, sind die Koeffizienten des resultierenden Polynoms nicht mehr ganzzahlig.

   d) Diese Menge ist ein Unterraum von $\mathbb{P}_3$, denn es gilt:

      1) Der Nullvektor ist enthalten, da das Nullpolynom $\mathbf{0}(0) = 0$ erfüllt;
      2) $(p_1 + p_2)(0) = p_1(0) + p_2(0) = 0 + 0 = 0$ für alle Polynome p_1, p_2 aus dieser Menge;
      3) $\lambda p(0) = 0$ für alle Polynome p aus dieser Menge und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

   e) Diese Menge ist kein Unterraum von $\mathbb{P}_3$, da zum Beispiel der Nullvektor (das Nullpolynom) nicht enthalten ist.

f) Diese Menge ist ein Unterraum von $\mathbb{P}_3$. Nachrechnen wie in Teil d).

2. Alle 10 Bedingungen aus der Definition eines Vektorraums müssen nachgerechnet werden. An dieser Stelle zeigen wir nur die am wenigsten offensichtlichen Eigenschaften. Der Nullvektor ist '1', da $x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$ gilt. Das Negative einer Zahl ist $1/x$, da $x \oplus 1/x = 1$ den Nullvektor ergibt. Ausserdem gilt $1 \otimes x = x^1 = x$. Abschliessend rechnen wir noch die zwei Eigenschaften nach, die Addition und Multiplikation verknüpfen:

$$
\begin{aligned}
c \otimes (x \oplus y) &= (xy)^c = x^c y^c = (c \otimes x) \oplus (c \otimes y), \\
(c+d) \otimes x &= x^{c+d} = x^c x^d = (c \otimes x) \oplus (d \otimes x)
\end{aligned}
$$

3. Um zu überprüfen, ob ein Polynom in S liegt, müssen wir herausfinden, ob $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) + \gamma p_3(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3$ gilt. Durch Koeffizientenvergleich ist die Gleichung equivalent zu dem folgenden linearen Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
\alpha + \gamma &= 1 \\
3\beta + \gamma &= 2 \\
\alpha + 5\gamma &= 3 \\
4\beta + 4\gamma &= 4
\end{aligned}
$$

Es hat die Lösung $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$ und $\gamma = 1/2$ und somit gilt $1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 \in S$

4. Es gilt $S = \ker(A)$ für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Daher ist S ein Unterraum und wir finden mit Hilfe der reduzierten Zeilenstufenform von A heraus, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von S bzw. $\ker(A)$ ist. Somit ist 1 die Dimension von S.

5. Wir rechnen nach:

   1) Da S und T Vektorräume sind, enthalten beide Nullvektor, und daher auch $S + T$, denn $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in S + T$.

   2) Für $s + t \in S + T$ und $s' + t' \in S + T$ gilt $(s + t) + (s' + t') = (s + s') + (t + t') \in S + T$, da $s + s' \in S$ und $t + t' \in T$.

   3) Für $s + t \in S + T$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha(s + t) = \alpha s + \alpha t \in S + T$, da $\alpha s \in S$ und $\alpha t \in T$.

Aufgabe 3

1. Seien

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}.
$$

   a) Für welches p ist $\ker(A)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^p$?

   b) Für welches q ist $\ker(B)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^q$?

   c) Für welches k ist $\text{Col}(A)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^k$?

d) Für welches l ist $\mathrm{Col}(B)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^l$?
e) Finden Sie ein von 0 verschiedenen Vektor in $\ker(A)$.
f) Finden Sie ein von 0 verschiedenen Vektor in $\ker(B)$.
g) Finden Sie ein von 0 verschiedenen Vektor in $\mathrm{Col}(A)$.
h) Finden Sie ein von 0 verschiedenen Vektor in $\mathrm{Col}(B)$.

2. Bestimmen Sie für

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix},$$

ob $\boldsymbol{w}$ im Spaltenraum $\mathrm{Col}(A)$ oder im Kern $\ker(A)$ liegt.

Lösung:

1. a) $\ker(A)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.
b) $\ker(B)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^5$.
c) $\mathrm{Col}(A)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$.
d) $\mathrm{Col}(B)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.
e) Die reduzierte Zeilenstufenform von A ist $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Damit ist $\ker(A)$ die Menge aller Vektoren der Form $\begin{bmatrix} 3x \\ x \end{bmatrix}$ und somit gehört der Vektor $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ zu $\ker(A)$.
f) Die zugehörige reduzierte Zeilenstufenform ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 17 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & -14 & 6 & -8 \end{bmatrix}.$$

$\ker(B)$ ist daher die Menge aller Vektoren der Form $\begin{bmatrix} -17x + 6y - 10z \\ 14x - 6y + 8z \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Somit liegt der Vektor $\begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\ker(B)$.

g) Sei $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dann gehört $A\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ nach Definition zum Spaltenraum $\mathrm{Col}(A)$.

h) Der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (die erste Spalte von B) liegt in $\mathrm{Col}(B)$.

2. $\boldsymbol{w}$ ist im Kern $\ker(A)$, da $A\boldsymbol{w} = 0$ gilt. $\boldsymbol{w}$ liegt auch im Spaltenraum $\mathrm{Col}(A)$, da das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}$ lösbar ist (z.B. kann man die reduzierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix betrachten). Es gibt also mindestens einen Vektor, zum Beispiel $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, so dass $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}$ gilt.

Aufgabe 4

1. Sei $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Transformation gegeben durch

$$T(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie eine Basis des Kerns $\ker(T)$ und des Bilds $\operatorname{Im}(T)$.

2. Sei

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

   1. Finden Sie eine Basis von $\ker(C)$.
   2. Wir bezeichnen mit T die durch $T(\boldsymbol{x}) = C\boldsymbol{x}$ definierte lineare Abbildung von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^4$. Ist T injektiv ? Ist T surjektiv ? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Sei $M_{2\times 2}$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen. Wir definieren die Abbildung $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ durch $T(A) = A + A^T$ für 2×2 Matrizen A.

   (a) Zeigen Sie, dass T eine lineare Abbildung ist.

   (b) Zeigen Sie, dass das Bild von T die Menge aller symmetrischen 2×2 Matrizen ist, d.h. $C \in M_{2\times 2}$ mit $C = C^T$.

   (c) Bestimmen Sie den Kern von T.

4. Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Zeigen Sie, dass die Matrizen A und B zeilenäquivalent sind.

   Bestimmen Sie

   1. den Rang von A und $\dim \ker(A)$;
   2. eine Basis für jeden der folgenden Unterräume $\operatorname{Col}(A)$, $\operatorname{Row}(A)$, $\ker(A)$, $\operatorname{Col}(A^T)$, $\operatorname{Row}(A^T)$ und $\ker(A^T)$.

Lösung:

1. Es gilt

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

   und daher offensichtlich $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^2$. Als Basis wählen wir die Standardbasis $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\}$. Die Polynome, so dass $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, sind gerade solche mit $a_0 = 0 = a_1$ und damit ist $\{t^2\}$ eine Basis von $\ker(T)$.

2. $\ker(C)$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Wir berechnen eine Zeilenstufenform von C:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Damit erhalten wir die reduzierte ZSF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 10/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Damit folgt aus $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{10}{3}x_5 &= 0 \\ x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{26}{3}x_5 &= 0 \\ x_4 - 4x_5 &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{10}{3}x_5 \\ x_2 &= -\tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{26}{3}x_5 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= 4x_5 \\ x_5 &= x_5 \end{aligned} \right.$$

Die Lösung in parametrisierter Vektorform ist:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jede Lösung $\boldsymbol{w}$ des Systems $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ lässt sich also schreiben als:

$$\boldsymbol{w} = \alpha \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Der Kern von C wird daher erzeugt durch

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Menge $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ ist eine Basis von $\ker C$.

2. T ist nicht surjektiv, da nicht jede Zeile ein Pivotelement enthält (und daher die Spalten von C nicht $\mathbb{R}^4$ aufspannen). T ist nicht injektiv, da nicht jede Spalte eine Pivotspalte ist (bzw. weil der Kern von C nichttrivial ist).

3. (a) Für A, B aus $M_{2\times 2}$ und einen beliebigen Skalar c gilt

$$\begin{aligned} T(A+B) &= (A+B)+(A+B)^T \\ &= A+B+A^T+B^T \\ &= (A+A^T)+(B+B^T) = T(A)+T(B) \\ T(cA) &= (cA)+(cA)^T = cA+cA^T \\ &= c(A+A^T) = cT(A). \end{aligned}$$

Damit ist T eine lineare Transformation aus $M_{2\times 2}$ in $M_{2\times 2}$.

(b) Wir beobachten, dass für eine symmetrische Matrix B (d.h. $B = B^T$) die Matrix $A = \frac{1}{2}B$ als Bild (unter T) B hat:

$$T(A) = \frac{1}{2}B + \left(\frac{1}{2}B\right)^T = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = B.$$

Damit enthält das Bild von T alle symmetrischen Matrizen. Es genügt also zu zeigen, dass jede Matrix im Bild von T symmetrisch ist. Sei $C := (A + A^T) = T(A)$ für ein beliebiges A, dann gilt :

$$C^T = (A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = C.$$

(c) Der Kern der Abbildung T ist

$$\ker T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \quad : \quad b \quad \text{réel} \right\},$$

da aus $T(A) = 0$ die Bedingung $A = -A^T$ und somit $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ folgt.

4. Wir stellen fest, dass die reduzierte Zeilenstufenform der beiden Matrizen dieselbe ist und sie daher zeilenäquivalent sind.

1. An der Matrix B kann man sofort ablesen, dass es zwei Pivotspalten gibt. Damit folgt $\text{Rang}A = \text{Rang}B = 2$ und mit der Dimensionsformel auch $\dim \ker A = n - \text{Rang}A = 4 - 2 = 2$.

2. Die ersten beiden Spalten (Pivotspalten) von A bilden eine Basis von Col$A$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$.

Die Nicht-Nullzeilen von B (einer Zeilenstufenform von A) bilden eine Basis des Zeilenraums Row$A$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$.

Die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ist äquivalent zu $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Die Lösung in parametrisierter Vektorform dieser Gleichung bilden eine Basis von ker$A$ $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Es gilt $\mathrm{Col}A^T = \mathrm{Row}A$ und $\mathrm{Row}A^T = \mathrm{Col}A$ und deren Basen sind bereits bekannt. Durch Lösen der Gleichung $A^T\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ erhalten wir

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & -6 \\ 9 & -4 & 10 \\ -7 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eine Basis von $\ker A^T$ ist also $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Wahr/Falsch
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.
Kapitel 4.1 & 4.2

1. Ein Unterraum eines Vektorraums ist auch selbst ein Vektorraum.
2. $\mathbb{R}^2$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.
3. Wenn S_1 und S_2 Unterräume eines Vektorraums V sind, dann ist auch $S_1 \cup S_2$ ein Unterraum von V.
4. Wenn S_1 und S_2 Unterräume eines Vektorraums V sind, dann ist auch $S_1 \cap S_2$ ein Unterraum von V.

Lösung: Kapitel 4.1 & 4.2

1. W
2. F
3. F
4. W