École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 7

Abgabe bis **03.11.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1 (Wiederholung von letzter Woche)

1. Berechnen Sie die folgenden Determinanten mit Hilfe von Co-Faktoren:

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Berechnen Sie die folgenden Determinanten durch Finden einer Zeilenstufenform:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Berechnen Sie die folgenden Determinanten.

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \, g = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 10 & 5 \\ 6 & 9 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Elementarmatrizen:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Zu welchen Elementaroperationen gehören sie?

5. Vorausgesetzt, dass

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$$

   berechnen Sie die Determinanten

$$t = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Lösung:

1.
   - Durch Entwicklung nach der ersten Zeile finden wir $a = 4$.
   - Durch Entwicklung nach der dritten Zeile findet man $b = 10$.
   - Durch Entwicklung nach der ersten Zeile finden wir $c = 72$. Da die Matrix eine Dreiecksform hat, ist ihre Determinante natürlich das Produkt der Diagonaleinträge.

2.
   - Durch elementare Zeilenoperationen erhalten wir

$$d = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -3 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

     Damit gilt $d = 3$.

   - Eine Zeilenstufenform der Matrix mit Determinante e ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

     Da die letzte Zeile kein Pivotelement enthält, gilt $e = 0$.

3. Es gilt $f = 2$ und $g = 0$.

4.
   - $\det E_1 = 1$. Diese Matrix addiert k Mal die zweite Zeile auf die dritte.
   - $\det E_2 = k$. Diese Matrix multipliziert die zweite Zeile mit k.
   - $\det E_3 = -1$. Diese Matrix vertauscht die ersten beiden Zeilen.
   - $\det E_4 = -1$. Diese Matrix vertauscht die erste mit der dritten Zeile.

5.
   - $t = 7$. Da diese Matrix aus der Ausgangsmatrix durch Hinzuaddieren der zweite Zeile zur ersten hervorgeht, ändert sich die Determinante nicht.
   - $s = 14$. Diese Matrix entsteht aus der Ausgangsmatrix durch Multiplikation der zweiten Zeile mit 2 sowie durch das anschliessende Hinzuaddieren der ersten Zeile auf die zweite Zeile und somit ist die Determinante $s = 2 \cdot 7$.

Aufgabe 2

1. Ist die folgende Matrix invertierbar?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Gegeben $n \times n$ Matrizen A, B, C, D.

   (a) Ist die folgende Aussage korrekt?

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \, \det D - \det B \, \det C.$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Wenn A invertierbar ist und 0 die $n \times n$ Nullmatrix bezeichnet:

1. Finden Sie $n \times n$ Matrizen X und Y, die die folgende Zerlegung erlauben:
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}.$$

2. Zeigen Sie, dass
$$\det A \det X = \det C$$
und
$$\det A \det Y = \det(AD - CB)$$
gilt falls $AC = CA$.

3. Sei
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Berechnen Sie $(A^{-1})_{23}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel.

4. Berechnen Sie das Volumen des Parallelopipeds, das durch die Punkte
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
aufgespannt wird.

Lösung:

1. Nein, da die Spalten der Matrix linear abhängig sind.

2. (a) Wir zeigen mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass diese Gleichung im Allgemeinen nicht gilt. Wir wählen als Beispiel
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Dann gilt
$$\det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C = 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -3$$
und
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

(b) 1. Durch Multiplikation der Blockmatrizen erhalten wir
$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ XA & XB + Y \end{bmatrix}$$
und wir folgern
$$C = XA, \quad D = XB + Y.$$
Da A invertierbar ist, folgt
$$X = CA^{-1}, \quad Y = D - CA^{-1}B.$$

2. Falls $AC = CA$ und da A invertierbar ist, gilt $ACA^{-1} = C$ und wir erhalten:

$$\det A \det X = \det(AX) = \det(ACA^{-1}) = \det C,$$

$$\det A \det Y = \det(AY) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CB).$$

3. Nach der Inversenformel aus der Vorlesung gilt

$$(A^{-1})_{23} = \frac{C_{32}}{\det A},$$

wobei

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -4(6-9) = 12.$$

Durch elementare Zeilenoperationen auf A erhält man

$$\det A = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 11.$$

Es folgt $(A^{-1})_{23} = \dfrac{12}{11}$.

4. Das durch die gegebenen Punkte beschriebene Volumen ist ein verzerrter Würfel. Das Volumen kann berechnet werden, wenn wir die Einheitsvektoren auf die Spalten der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

abbilden (eine lineare Transformation). Wie in der Vorlesung gezeigt, ist das neue Volumen gerade $\det(A)$ (da der Einheitswürfel definiert durch die Einheitsvektoren Volumen 1 hat):

$$\text{Volumen} = \left|\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right| = |-15| = 15.$$

Aufgabe 3

1. Für welche Werte von s ist das folgende lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar?

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2sx_2 &= 4 \\ -sx_1 + 6x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Geben Sie diese Lösung an (in Abhängigkeit von s).

2. Bestimmen Sie die Adjunkte $adj(A)$ der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

und geben Sie A^{-1} an.

Lösung:

1. Das lineare Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung genau dann, wenn die folgende Matrix eine von 0 verschiedene Determinante hat (und somit invertierbar ist):

$$\begin{vmatrix} 3 & -2s \\ -s & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 18 - 2s^2 \neq 0$$

   Somit folgt $s \neq \pm 3$. Das System hat also für $s \neq \pm 3$ genau eine Lösung. Wir berechnen diese Lösung nun mit Hilfe der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{18-2s^2} \begin{vmatrix} 4 & -2s \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{24+2s}{18-2s^2} \\ x_2 &= \frac{1}{18-2s^2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -s & 1 \end{vmatrix} = \frac{3+4s}{18-2s^2} \end{aligned}$$

2. Zunächst berechnen wir die Determinante von A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -2$$

   Den Eintrag in Zeile i und Spalte j in der Adjunkten erhalten wir durch $C_{ji} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$, d.h. den (j,i)-Co-Faktor von A (durch Streichen der j-ten Zeile und i-ten Spalte!). Es gilt:

$$\begin{aligned} adj(A)_{11} &= \det(A_{11}) = -6 \\ adj(A)_{12} &= -\det(A_{21}) = 1 \\ adj(A)_{13} &= \det(A_{31}) = -6 \\ adj(A)_{21} &= -\det(A_{12}) = 4 \\ adj(A)_{22} &= \det(A_{22}) = -1 \\ adj(A)_{23} &= -\det(A_{32}) = 2 \\ adj(A)_{31} &= \det(A_{13}) = 4 \\ adj(A)_{32} &= -\det(A_{23}) = -1 \\ adj(A)_{33} &= \det(A_{33}) = 4 \end{aligned}$$

   Damit folgt:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -6 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Wahr/Falsch
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.
Kapitel 4.2

1. Für eine $m \times n$ Matrix A gilt $\ker(A) \subseteq \mathbb{R}^m$.

2. Für eine $m \times n$ Matrix A gilt $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ wenn $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

3. Der Spaltenraum einer $m \times n$ Matrix ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.
4. Die Menge $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ ist eine Basis von $V = span(\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n})$.

Lösung: Kapitel 4.1 & 4.2

1. F
2. W
3. F
4. F