École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 7

Abgabe bis **03.11.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1 (Wiederholung von letzter Woche)

1. Berechnen Sie die folgenden Determinanten mit Hilfe von Co-Faktoren:

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Berechnen Sie die folgenden Determinanten durch Finden einer Zeilenstufenform:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Berechnen Sie die folgenden Determinanten.

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \; g = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 10 & 5 \\ 6 & 9 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Elementarmatrizen:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Zu welchen Elementaroperationen gehören sie?

5. Vorausgesetzt, dass

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$$

   berechnen Sie die Determinanten

$$t = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 2

1. Ist die folgende Matrix invertierbar?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Gegeben $n \times n$ Matrizen A, B, C, D.

   (a) Ist die folgende Aussage korrekt?

   $$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \, \det D - \det B \, \det C.$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

   (b) Wenn A invertierbar ist und 0 die $n \times n$ Nullmatrix bezeichnet:

   1. Finden Sie $n \times n$ Matrizen X und Y, die die folgende Zerlegung erlauben:

   $$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}.$$

   2. Zeigen Sie, dass

   $$\det A \det X = \det C$$

   und

   $$\det A \det Y = \det(AD - CB)$$

   gilt falls $AC = CA$.

3. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Berechnen Sie $(A^{-1})_{23}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel.

4. Berechnen Sie das Volumen des Parallelopipeds, das durch die Punkte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   aufgespannt wird.

Aufgabe 3

1. Für welche Werte von s ist das folgende lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar?

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2sx_2 &= 4 \\ -sx_1 + 6x_2 &= 1 \end{aligned}$$

   Geben Sie diese Lösung an (in Abhängigkeit von s).

2. Bestimmen Sie die Adjunkte $adj(A)$ der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

und geben Sie A^{-1} an.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 4.2

1. Für eine $m \times n$ Matrix A gilt $\ker(A) \subseteq \mathbb{R}^m$.
2. Für eine $m \times n$ Matrix A gilt $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ wenn $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.
3. Der Spaltenraum einer $m \times n$ Matrix ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.
4. Die Menge $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ ist eine Basis von $V = span(\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n})$.