École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 6

Abgabe bis **27.10.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

1. - Was ist der Rang einer 6×8 Matrix A, wobei $ker(A)$ Dimension 3 hat?
   - Wenn der Rang einer 9×8 Matrix 7 ist, was ist dann die Dimension von $ker(A)$?
   - Konstruieren Sie, falls möglich, eine 3×5 Matrix A, so dass $ker(A)$ Dimension 3 und $Col(A)$ Dimension 2 hat.
   - Finden Sie eine 3×4 Matrix mit Rang 1.
2. Sei $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$. Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Beweisen Sie ausserdem, dass

$$\boldsymbol{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

eine Basis von U ist. Was ist die Dimension von U? Gibt es Matrizen A, B, so dass $U = Col(A)$ und $U = ker(B)$ gilt?

Lösung:

1. - Es gilt Rang(A) = 8 - dim ker(A) = 5.
   - Genauso folgt $ker(A)$ = 8 - Rang(A) = 1.
   - Die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   hat zwei Pivotspalten und der Kern ist 3-dimensional.
   - Die Matrix ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Offensichtlich hat sie nur eine Pivotspalte und einen 3-dimensionalen Kern.

2. Es gilt natürlich $0 \in U$. Ausserdem gilt für alle $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(u_1+v_1)+2(u_2+v_2)+(u_3+v_3) = u_1+2u_2+u_3+v_1+2v_2+v_3 = 0+0 = 0\\ (\alpha u_1)+2(\alpha u_2)+(\alpha u_3) = \alpha(u_1+2u_2+u_3) = 0\end{aligned}$$

Somit ist U ein Unterraum. Offensichtlich gilt $\boldsymbol{b_1} \in U$ und $\boldsymbol{b_2} \in U$. Ausserdem sind $\boldsymbol{b_1}$ und $\boldsymbol{b_2}$ linear unabhängig. Da alle $\boldsymbol{x} \in U$ nach Definition $x_3 = -2x_2 - x_3$ erfüllen, lassen sie sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_2 - x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + (x_2 - x_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$ bilden daher eine Basis von U. Für $A = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b_1}\boldsymbol{b_2}\end{bmatrix}$ gilt $Col(A) = U$. Ähnlich folgt $U = ker(B)$ für $B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

Aufgabe 2

1. Seien

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die LU-Zerlegung von A und nutzen Sie das Ergebnis, um das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ zu lösen.

2. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^2$?

- $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$
- $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$
- $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = x_2 + 1\right\}$
- $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = 3x_2\right\}$
- $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\}$
- $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\right\}$

3. Finden Sie für die folgende Matrix A eine Basis von $Col(A)$ sowie von $ker(A)$ und geben Sie die Dimensionen dieser Räume an.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Lösung:

1. Die LU-Zerlegung von A ist

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   Zunächst lösen wir daher das System $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ (durch elementare Zeilenoperationen oder unter Zuhilfenahme der Inversen von L). Wir erhalten $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nun lösen wir das System $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ und die Lösung des Systems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{11}{8} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Durch Nachrechnen der Eigenschaften erhalten wir
   - Ja.
   - Nein, da der Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht enthalten ist.
   - Nein, da der Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht enthalten ist.
   - Ja.
   - Nein, da $(-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht enthalten ist, also die Menge das zweite Kriterium (Multiplikation mit einem Skalar) nicht erfüllt.
   - Nein, da $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ nicht enthalten ist, also die Menge das dritte Kriterium (Addition zweier Vektoren aus der Menge) nicht erfüllt.

3. Wir finden eine ZSF der Matrix A und lesen ab:
   - $Col(A)$ wird zum Beispiel erzeugt durch die erste, zweite, vierte und letzte Spalte von A (A hat 4 Pivotspalten). Also ist $Col(A)$ 4-dimensional.
   - $ker(A)$ ist folglich 1-dimensional (da A 5 Spalten hat) und wird zum Beispiel durch den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugt.

Aufgabe 3

1. Berechnen Sie die folgenden Determinanten mit Hilfe von Co-Faktoren:

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Berechnen Sie die folgenden Determinanten durch Finden einer Zeilenstufenform:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Berechnen Sie die folgenden Determinanten.

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, g = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 10 & 5 \\ 6 & 9 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Elementarmatrizen:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Zu welchen Elementaroperationen gehören sie?

5. Vorausgesetzt, dass

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$$

   berechnen Sie die Determinanten

$$t = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Lösung:

1. – Durch Entwicklung nach der ersten Zeile finden wir $a = 4$.
   – Durch Entwicklung nach der dritten Zeile findet man $b = 10$.
   – Durch Entwicklung nach der ersten Zeile finden wir $c = 72$. Da die Matrix eine Dreiecksform hat, ist ihre Determinante natürlich das Produkt der Diagonaleinträge.

2. – Durch elementare Zeilenoperationen erhalten wir

$$d = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} -3 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

   Damit gilt $d = 3$.

   – Eine Zeilenstufenform der Matrix mit Determinante e ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Da die letzte Zeile kein Pivotelement enthält, gilt $e = 0$.

3. Es gilt $f = 2$ und $g = 0$.

4. - $\det E_1 = 1$. Diese Matrix addiert k Mal die zweite Zeile auf die dritte.
   - $\det E_2 = k$. Diese Matrix multipliziert die zweite Zeile mit k.
   - $\det E_3 = -1$. Diese Matrix vertauscht die ersten beiden Zeilen.
   - $\det E_4 = -1$. Diese Matrix vertauscht die erste mit der dritten Zeile.

5. - $t = 7$. Da diese Matrix aus der Ausgangsmatrix durch Hinzuaddieren der zweite Zeile zur ersten hervorgeht, ändert sich die Determinante nicht.
   - $s = 14$. Diese Matrix entsteht aus der Ausgangsmatrix durch Multiplikation der zweiten Zeile mit 2 sowie durch das anschliessende Hinzuaddieren der ersten Zeile auf die zweite Zeile und somit ist die Determinante $s = 2 \cdot 7$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass gilt:

a) Wenn A eine invertierbare Matrix ist, dann gilt $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

b) Wenn A und P quadratische $n \times n$ Matrizen sind und P invertierbar ist, dann gilt $\det(PAP^{-1}) = \det A$.

c) Wenn U eine quadratische Matrix ist mit $U^T U = I$, dann gilt $\det U = \pm 1$.

d) Wenn A eine quadratische Matrix ist mit $\det(A^4) = 0$, dann ist A nicht invertierbar.

Lösung:

a) $\det A \, \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I = 1$, und daher $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

b) $\det(PAP^{-1}) = \det P \, \det A \, \det(P^{-1}) = \det(PP^{-1}) \det A = \det I \, \det A = \det A$.

c) $1 = \det I = \det(U^T U) = \det(U^T) \, \det U = (\det U)^2$, und daher $\det U = \pm 1$.

d) $0 = \det(A^4) = (\det A)^4$, und daher $\det A = 0$, woraus folgt, dass A nicht invertierbar ist.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 3

1. Wenn A eine Diagonalmatrix ist, dann ist die Determinante von A die Summe der Diagonaleinträge von A.

2. Die Anwendung elementarer Zeilenoperationen lässt die Determinante einer Matrix unverändert.

3. Wenn die Spalten der Matrix A linear abhängig sind, dann gilt $\det(A) = 0$.

4. Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ für zwei quadratische Matrizen A, B.

5. Es gilt $\det(A^T) = -\det(A)$.

6. Die Determinante einer Blockmatrix der Form $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ (A, B, D sind quadratische Matrizen) ist $\det(A) \, \det(D)$.

7. Die durch eine Matrix A beschriebene lineare Transformation ist injektiv genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.

Kapitel 2.8

1. Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, wobei A eine $m \times n$ Matrix ist, ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^m$.

2. Die Spalten einer invertierbaren $n \times n$ Matrix bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

Kapitel 2.9

1. Jede Gerade im $\mathbb{R}^n$ ist ein eindimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

2. Die Dimension von $Col(A)$ für eine $m \times n$ Matrix A ist die Anzahl der Spalten mit Pivotelementen.

3. Die Dimension von $Col(A)$ plus die Dimension von $ker(A)$ ergibt die Anzahl der Spalten der $m \times n$ Matrix A.

4. Wenn eine Menge von p Vektoren einen p-dimensionalen Unterraum H von $\mathbb{R}^n$ aufspannen, dann stellen diese Vektoren eine Basis von H dar.

Lösung:
Kapitel 3

1. F

2. F

3. W

4. F

5. F

6. W

7. Falls die Matrix A als quadratisch vorausgesetzt wird, ist die Aussage korrekt. Falls man die Determinante einer $m \times n$ Matrix für $m \neq n$ auf 0 setzt (in der Vorlesung nicht definiert), ist die Aussage falsch.

Kapitel 2.8

1. F

2. W

Kapitel 2.9

1. F

2. W

3. W

4. W