École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 6

Abgabe bis **27.10.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

1.
   - Was ist der Rang einer 6×8 Matrix A, wobei $ker(A)$ Dimension 3 hat?
   - Wenn der Rang einer 9×8 Matrix 7 ist, was ist dann die Dimension von $ker(A)$?
   - Konstruieren Sie, falls möglich, eine 3×5 Matrix A, so dass $ker(A)$ Dimension 3 und $Col(A)$ Dimension 2 hat.
   - Finden Sie eine 3×4 Matrix mit Rang 1.

2. Sei $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$. Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Beweisen Sie ausserdem, dass

$$\boldsymbol{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

eine Basis von U ist. Was ist die Dimension von U? Gibt es Matrizen A, B, so dass $U = Col(A)$ und $U = ker(B)$ gilt?

Aufgabe 2

1. Seien

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die LU-Zerlegung von A und nutzen Sie das Ergebnis, um das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ zu lösen.

2. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^2$?
   - $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
   - $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
   - $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = x_2 + 1 \right\}$

- $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = 3x_2\right\}$
- $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\}$
- $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\right\}$

3. Finden Sie für die folgende Matrix A eine Basis von $Col(A)$ sowie von $ker(A)$ und geben Sie die Dimensionen dieser Räume an.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3

1. Berechnen Sie die folgenden Determinanten mit Hilfe von Co-Faktoren:

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Berechnen Sie die folgenden Determinanten durch Finden einer Zeilenstufenform:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Berechnen Sie die folgenden Determinanten.

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, g = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 10 & 5 \\ 6 & 9 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Elementarmatrizen:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Zu welchen Elementaroperationen gehören sie?

5. Vorausgesetzt, dass

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$$

   berechnen Sie die Determinanten

$$t = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass gilt:

a) Wenn A eine invertierbare Matrix ist, dann gilt $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

b) Wenn A und P quadratische $n \times n$ Matrizen sind und P invertierbar ist, dann gilt $\det(PAP^{-1}) = \det A$.

c) Wenn U eine quadratische Matrix ist mit $U^T U = I$, dann gilt $\det U = \pm 1$.

d) Wenn A eine quadratische Matrix ist mit $\det(A^4) = 0$, dann ist A nicht invertierbar.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 3

1. Wenn A eine Diagonalmatrix ist, dann ist die Determinante von A die Summe der Diagonaleinträge von A.
2. Die Anwendung elementarer Zeilenoperationen lässt die Determinante einer Matrix unverändert.
3. Wenn die Spalten der Matrix A linear abhängig sind, dann gilt $\det(A) = 0$.
4. Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ für zwei quadratische Matrizen A, B.
5. Es gilt $\det(A^T) = -\det(A)$.
6. Die Determinante einer Blockmatrix der Form $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ (A, B, D sind quadratische Matrizen) ist $\det(A)\,\det(D)$.
7. Die durch eine Matrix A beschriebene lineare Transformation ist injektiv genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.

Kapitel 2.8

1. Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, wobei A eine $m \times n$ Matrix ist, ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^m$.
2. Die Spalten einer invertierbaren $n \times n$ Matrix bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

Kapitel 2.9

1. Jede Gerade im $\mathbb{R}^n$ ist ein eindimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.
2. Die Dimension von $Col(A)$ für eine $m \times n$ Matrix A ist die Anzahl der Spalten mit Pivotelementen.
3. Die Dimension von $Col(A)$ plus die Dimension von $ker(A)$ ergibt die Anzahl der Spalten der $m \times n$ Matrix A.
4. Wenn eine Menge von p Vektoren einen p-dimensionalen Unterraum H von $\mathbb{R}^n$ aufspannen, dann stellen diese Vektoren eine Basis von H dar.