École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 5

Abgabe bis **20.10.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

Beweisen Sie die Ungleichung des quadratischen und arithmetischen Mittels

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Lösung: Zunächst stellen wir fest, dass $a^2 + b^2$ nicht negativ ist. Daher ist linke Seite der Ungleichung immer definiert und insbesondere nicht negativ.
1. Fall: $\frac{1}{2}(a+b) < 0$. Dann ist nichts mehr zu zeigen, da $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} \geq 0 > \frac{1}{2}(a+b)$.
2. Fall: $\frac{1}{2}(a+b) \geq 0$. In diesem Fall ist Quadrieren eine äquivalente Umformung und wir erhalten

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} &\iff \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4}\\ &\iff 2a^2+2b^2 \geq (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab\\ &\iff a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt für alle reellen Zahlen, da Quadrate immer nicht negativ sind.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Lösung: Wir geben einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen die Anzahl der Primzahlen wäre endlich. Seien dann $p_1, \ldots, p_k$ alle Primzahlen. Wir konstruieren eine neue Zahl

$$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1.$$

Nun ist q nicht durch $p_1, \ldots, p_k$ teilbar. Da dies aber alle Primzahlen sind, ist q also nur durch 1 und sich selbst teilbar. Das bedeutet q ist eine Primzahl. Dies ergibt einen Widerspruch, da q nicht in $p_1, \ldots, p_k$ enthalten war.
Wir haben also unsere Annahme zu einem Widerspruch geführt und damit gezeigt, dass sie falsch ist. Es gibt also unendlich viele Primzahlen.

Aufgabe 3

Gegeben n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ (nicht notwendigerweise verschieden). Zeigen Sie, dass es immer eine Folge von aufeinanderfolgenden Zahlen $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_\ell$ gibt, dessen Summe $\sum_{i=k+1}^{\ell} a_i$ ein

Vielfaches von n ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Reste bei Division durch n der Summen $s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$ für $j = 0, 1, \dots, n$ (wir definieren $s_0 = 0$). Benutzen Sie das Schubfachprinzip.

Lösung: Zunächst stellen wir fest, dass es $(n+1)$ Summen $s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$ gibt: $s_0, s_1, \dots, s_n$. Da es nur n verschiedene Reste $(0, \dots, n-1)$ bei Division durch n gibt, müssen also nach Schubfachprinzip mindestens zwei der s_j's einen gleichen Rest haben. Seien also s_p und s_q mit $p < q$ zwei Summen mit gleichem Rest bei Division durch n. Dann lässt $(s_q - s_p)$ den Rest 0 bei Division durch n. Nun ist aber auch

$$s_q - s_p = \sum_{i=0}^{q} a_i - \sum_{i=0}^{p} a_i = \sum_{i=p+1}^{q} a_i$$

unsere gesuchte Summe von aufeinanderfolgenden Elementen $a_{p+1}, \dots, a_q$.

Aufgabe 4

- Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann injektiv, wenn T surjektiv ist.
- Seien A, B, C invertierbare $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass ABC auch invertierbar ist durch Angabe einer Matrix D, so dass $(ABC)D = I$ und $D(ABC) = I$ gilt.

Lösung:

- Laut Vorlesung folgt aus T injektiv, dass die Spalten der $n \times n$ Standardmatrix A von T linear unabhängig sind. Da n linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$ eine Basis sind, ist T auch surjektiv (und damit bijektiv).
  Analog folgt aus T surjektiv, dass jede der n Zeilen von A ein Pivotelement enthält. Damit enthält aber auch jede der n Spalten ein Pivotelement und somit ist T auch injektiv (und damit bijektiv).
- Die Inverse der Matrix ABC ist $D := C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Wir rechnen nach: $(ABC)C^{-1}B^{-1}A^{-1} = ABCC^{-1}B^{-1}A^{-1} = ABIB^{-1}A^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ und $C^{-1}B^{-1}A^{-1}(ABC) = C^{-1}B^{-1}A^{-1}ABC = C^{-1}B^{-1}IBC = C^{-1}B^{-1}BC = C^{-1}IC = C^{-1}C = I$.

Aufgabe 5

1. Für die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & -3 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

gilt

(A) $(AB)_{32} = 1$
(B) $(AB)_{32} = -5$

(C) $(AB)_{32} = -1$
(D) $(AB)_{32} = 0$.

2. Die Inverse von
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$
erfüllt

   (A) $(A^{-1})_{41} = 0$
   (B) $(A^{-1})_{41} = 3/4$
   (C) $(A^{-1})_{41} = -1$
   (D) $(A^{-1})_{41} = -1/4$.

3. Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?
   Rechnen Sie so wenig wie möglich, um Ihre Antwort zu begründen.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

4. Berechnen Sie die Inverse der Matrizen
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung:

1. (D)

2. (B)

3. Die Matrix A ist quadratisch (4×4). Es reicht daher, sie in Zeilenstufenform zu überführen, um zu sehen, dass sie 4 Pivotpositionen hat :
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$
   Nach Satz 19 der Vorlesung ist A also invertierbar.

   Die Matrix B ist ebenfalls quadratisch (4×4). Ausserdem ist B bereits in Zeilenstufenform und daher ist wiederum nach Satz 19 invertierbar, da sie 4 Pivotelemente hat.

   Die Transponierte von C ist:
$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = B.$$

Da B invertierbar ist, ist auch C invertierbar (siehe Satz 19 l)).

Dagegen ist die Matrix D nicht quadratisch und kann daher nicht invertierbar sein.

4. Zur Berechnung der Inversen von A bzw. B bringen wir $[A \quad I]$ bzw. $[B \quad I]$ in reduzierte Zeilenstufenform $[I \quad C]$ bzw. $[I \quad D]$. Falls dies möglich ist, gilt $A^{-1} = C$ bzw. $B^{-1} = D$. Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}.
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} B & I \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -13 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11/5 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 & -5 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 & -5 \end{array}\right]. \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -13 & 7 & 11 \\ 6 & -3 & -5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

1. Sei $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0_n \end{bmatrix}$ eine $2n \times 2n$ Matrix, wobei A, B und C drei $n \times n$ Matrizen sind und 0_n die $n \times n$ Nullmatrix bezeichnet. Dann gilt:

   (A) $\quad M^T M = \begin{bmatrix} AA + CC & AB \\ BA & BB \end{bmatrix}$

   (B) $\quad M^T M = \begin{bmatrix} A^T A + C^T C & BA^T \\ AB^T & B^T B \end{bmatrix}$

   (C) $\quad M^T M = \begin{bmatrix} A^T A + B^T C & A^T B \\ C^T A & C^T B \end{bmatrix}.$

   (D) $\quad M^T M = \begin{bmatrix} A^T A + C^T C & A^T B \\ B^T A & B^T B \end{bmatrix}.$

2. Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit $T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. Geben Sie die zu T inverse lineare Abbildung an, d.h. $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, so dass $S(T(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ und $T(S(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y}$ für alle $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

3.

$$\text{Seien} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie MN auf zwei verschiedene Wegen

- durch die Zeilen-Spalten-Regel.
- durch Spalten-Zeilen-Entwicklung.

4.

$$\text{Seien } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Rechnen Sie zunächst $A^2 = I_2$ nach.

(b) Zeigen Sie, dass $M^2 = I_4$ gilt.

(c) Geben Sie A^{-1} und M^{-1} an.

5. Berechnen Sie die LU-Zerlegung jeder der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -9 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & -5 \\ -2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

sowie

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

6. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der LU-Zerlegung.

Lösung:

1. (D)

2. Wir berechnen die Inverse der Standardmatrix von A wie üblich durch elementare Zeilenoperationen:

$$\begin{bmatrix}1&2&0&1&0&0\\2&0&-3&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&-4&-3&-2&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\\0&-4&-3&-2&1&0\end{bmatrix}$$
$$\sim\begin{bmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&-2&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&1&0&2&-1&-3\\0&0&1&-2&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-3&2&6\\0&1&0&2&-1&-3\\0&0&1&-2&1&4\end{bmatrix},$$

Damit erhalten wir

$$S(\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}-3&2&6\\2&-1&-3\\-2&1&4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3y_1+2y_2+6y_3\\2y_1-y_2-3y_3\\-2y_1+y_2+4y_3\end{pmatrix}.$$

3. • Zeilen-Spalten-Regel:

$$MN=\begin{bmatrix}-1+8&-2+4\\-2+10&-4+5\\-3+0&-6+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&2\\8&1\\-3&-6\end{bmatrix}$$

• Spalten-Zeilen-Entwicklung:

$$MN=\begin{bmatrix}-1&-2\\-2&-4\\-3&-6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8&4\\10&5\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&2\\3&1\\-3&-6\end{bmatrix}$$

4. (a) $A^2=I_2$.

(b) Wir stellen zunächst fest, dass

$$M=\begin{bmatrix}A&0\\I_2&-A\end{bmatrix}\text{ gilt und daher }M^2=\begin{bmatrix}A^2&0\\0&(-A)^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_2&0\\0&I_2\end{bmatrix}\text{ folgt.}$$

(c) $A=A^{-1}$ und $M=M^{-1}$.

5.

$$A=\begin{bmatrix}2&5\\-3&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&5\\0&7/2\end{bmatrix}=U\quad\text{und}\quad L=\begin{bmatrix}1&0\\-3/2&1\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}2&-4&4&-2\\6&-9&7&-3\\-1&-4&8&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-4&4&-2\\0&3&-5&3\\0&-6&10&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-4&4&-2\\0&3&-5&3\\0&0&0&5\end{bmatrix}=U\text{ und }L=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\-1/2&-2&1\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1&3&-5\\-1&-5&8\\4&2&-5\\-2&-4&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&-5\\0&-2&3\\0&-10&15\\0&2&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&-5\\0&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=U\quad\text{und}\quad L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\4&5&1&0\\-2&-1&0&1\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}2&-4&-2&3\\6&-9&-5&8\\2&-7&-3&9\\4&-2&-2&-1\\-6&3&3&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-4&-2&3\\0&3&1&-1\\0&-3&-1&6\\0&6&2&-7\\0&9&-3&13\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-4&-2&3\\0&3&1&-1\\0&0&0&5\\0&0&0&-5\\0&0&0&10\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-4&-2&3\\0&3&1&-1\\0&0&0&5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

$$\text{und} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Wir nutzen die Formel aus der Vorlesung für die Inverse einer Matrix in oberer Block-Dreiecksform mit

$$A_{11} = A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die Inverse von A_{11} und somit auch von A_{22} ist

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit erhalten wir:

$$-A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Und die Inverse ist:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -9 & 0 \\ -3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Wir erhalten die LU-Zerlegung:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Damit finden wir die Inverse:

$$A^{-1} = U^{-1} L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{32} & \frac{23}{32} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 41 & -3 & 23 \\ 12 & 4 & -4 \\ -32 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$