École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 5

Abgabe bis **20.10.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

Beweisen Sie die Ungleichung des quadratischen und arithmetischen Mittels

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 3

Gegeben n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ (nicht notwendigerweise verschieden). Zeigen Sie, dass es immer eine Folge von aufeinanderfolgenden Zahlen $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_\ell$ gibt, dessen Summe $\sum_{i=k+1}^{\ell} a_i$ ein Vielfaches von n ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Reste bei Division durch n der Summen $s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$ für $j = 0, 1, \ldots, n$ (wir definieren $s_0 = 0$). Benutzen Sie das Schubfachprinzip.

Aufgabe 4

- Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann injektiv, wenn T surjektiv ist.
- Seien A, B, C invertierbare $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass ABC auch invertierbar ist durch Angabe einer Matrix D, so dass $(ABC)D = I$ und $D(ABC) = I$ gilt.

Aufgabe 5

1. Für die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & -3 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

gilt

(A) $(AB)_{32} = 1$
(B) $(AB)_{32} = -5$
(C) $(AB)_{32} = -1$
(D) $(AB)_{32} = 0$.

2. Die Inverse von
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$
erfüllt

(A) $(A^{-1})_{41} = 0$
(B) $(A^{-1})_{41} = 3/4$
(C) $(A^{-1})_{41} = -1$
(D) $(A^{-1})_{41} = -1/4$.

3. Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?
Rechnen Sie so wenig wie möglich, um Ihre Antwort zu begründen.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

4. Berechnen Sie die Inverse der Matrizen
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 6

1. Sei $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0_n \end{bmatrix}$ eine $2n \times 2n$ Matrix, wobei A, B und C drei $n \times n$ Matrizen sind und 0_n die $n \times n$ Nullmatrix bezeichnet. Dann gilt:

(A) $\quad M^T M = \begin{bmatrix} AA + CC & AB \\ BA & BB \end{bmatrix}$

(B) $\quad M^T M = \begin{bmatrix} A^T A + C^T C & BA^T \\ AB^T & B^T B \end{bmatrix}$

(C) $\quad M^T M = \begin{bmatrix} A^T A + B^T C & A^T B \\ C^T A & C^T B \end{bmatrix}$.

(D) $\quad M^T M = \begin{bmatrix} A^T A + C^T C & A^T B \\ B^T A & B^T B \end{bmatrix}$.

2. Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit $T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. Geben Sie die zu T inverse lineare Abbildung an, d.h. $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, so dass $S(T(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ und $T(S(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y}$ für alle $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

3.
$$\text{Seien} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie MN auf zwei verschiedene Wegen

- durch die Zeilen-Spalten-Regel.
- durch Spalten-Zeilen-Entwicklung.

4.
$$\text{Seien } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Rechnen Sie zunächst $A^2 = I_2$ nach.
(b) Zeigen Sie, dass $M^2 = I_4$ gilt.
(c) Geben Sie A^{-1} und M^{-1} an.

5. Berechnen Sie die LU-Zerlegung jeder der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -9 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & -5 \\ -2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

sowie

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

6. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der LU-Zerlegung.