École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 4

Abgabe bis **13.10.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

1. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ eine Bijektion. Zeigen Sie, unter Zuhilfenahme der Funktion f, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleich mächtig sind.
2. Sei A eine abzählbare Menge und $B \subseteq A$ eine Teilmenge von A. Zeigen Sie, dass B entweder endlich oder abzählbar ist.
3. Zeigen Sie, dass die Menge der Funktionen $\{f \ : \ (f : \mathbb{N} \to \{0, 1\})\}$ überabzählbar unendlich ist.

Lösung:

1. Zwei Mengen sind gleich mächtig wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt. Die Funktion f gibt uns schon eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}_{\geq 0}$. Wir nutzen f um eine neue bijektive Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ zu definieren.

   Sei $a \in \mathbb{N}$ die Zahl die unter f auf 0 abgebildet wird. Das heisst $f(a) = 0$. Wir definieren

$$g(n) = \begin{cases} f(k) & \text{für } k \in \mathbb{N}, k < a, n = 2k \\ -f(k) & \text{für } k \in \mathbb{N}, k < a, n = 2k + 1 \\ f(a) & \text{für } n = 2a \\ f(k) & \text{für } k \in \mathbb{N}, k > a, n = 2k - 1 \\ -f(k) & \text{für } k \in \mathbb{N}, k > a, n = 2k \end{cases}$$

   Diese Funktion ist surjektiv, da jedes Element in $\mathbb{Q}$ ein Bild ist. Weiterhin ist sie injektiv, da f injektiv ist. Damit ist g eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ und die beiden Mengen sind gleich mächtig.

2. Sei $f : \mathbb{N} \to A$ eine Bijektion. Wenn B endlich ist, ist nichts mehr zu zeigen. Nehmen wir daher an, dass B nicht endlich ist. Wir definieren eine Folge

$$\begin{aligned} b_0 &= \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ f(n) \in B\} \\ b_i &= \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ n > b_{i-1}, f(n) \in B\} \quad \text{für } i \geq 1. \end{aligned}$$

   Da B nicht endlich ist, ist die Folge $b_0, b_1, \ldots$ nicht endlich. Wir definieren nun die Funktion $g : \mathbb{N} \to B$ als $g(i) = b_i$. Da die b_i paarweise verschieden sind, ist g injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass g surjektiv ist. Sei $b \in B$. Dann ist $b \in A$. Somit existiert ein n mit $f(n) = b$. Damit existiert aber auch ein n' mit $g(n') = b$. Damit ist g eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und B und das bedeutet B ist abzählbar.

3. Nehmen wir an, die Menge dieser Funktionen sei abzählbar. Dann kann man die Funktionen abzählen als $f_0, f_1, f_2, \ldots$. Nun definieren wir die Funktion F als $F(n) = 1 - f_n(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist F verschieden von allen f_i. F ist aber auch eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\{0, 1\}$ und müsste damit also in den f_i abgezählt werden. Dies ist ein Widerspruch und damit ist die Menge der Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\{0, 1\}$ nicht abzählbar.

Aufgabe 2

1. Finden Sie die Standardmatrizen der folgenden linearen Abbildungen

   - $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-5\\3\\6\end{bmatrix}$.
   - $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
     $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.
   - $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\-5\end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\-6\\1\\0\end{bmatrix}$.

2. Geben Sie für die folgenden Beschreibungen einer linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Transformationsmatrix an. Wir nutzen die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$, dh. $\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

   (a) T lässt $\boldsymbol{e_1}$ unverändert und bildet $\boldsymbol{e_2}$ auf $\boldsymbol{e_2} + 2\boldsymbol{e_1}$ ab.

   (b) T rotiert die Punkte um 270 Grad um den Ursprung.

   (c) T spiegelt Punkte zunächst an der x_1-Achse und spiegelt sie dann an der Geraden $x_1 = x_2$.

3. Entscheiden Sie, ob die folgenden linearen Transformationen injektiv oder surjektiv sind:

   (a) $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\5\end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\-6\\1\\0\end{bmatrix}$.

   (b) $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1 + x_2\\x_2 + x_3\\x_3 + x_4\\0\end{bmatrix}$.

Lösung:

1.
$$\begin{bmatrix}4 & -5\\-1 & 3\\2 & 6\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1/2 & -1/2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & -12\\0 & 1\\-5 & -15\end{bmatrix}.$$

2. (a)
$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Zur Erinnerung: Eine lineare Abbildung ist surjektiv, wenn die Standardmatrix in Zeilenstufenform in jeder Zeile ein Pivotelement enthält. Weiterhin ist eine lineare Abbildung injektiv, wenn die Standardmatrix in Zeilenstufenform in jeder Spalte ein Pivotelement enthält. Daher:

   (a) Die zugehörige Standardmatrix ist

   $$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   daher ist die lineare Transformation injektiv aber nicht surjektiv;

   (b) Die zugehörige Standardmatrix ist

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   daher ist die lineare Transformation weder injektiv noch surjektiv;

Aufgabe 3

1. Gegeben die Matrizen

   $$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 5 & 7 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

   berechnen Sie AC, BC und CB.

2. Gegeben

   $$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{bmatrix},$$

   für welche Werte von k gilt $AB = BA$?

3. Gegeben die Matrizen

   $$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Falls das Produkt definiert ist, berechnen Sie:

   $$AB, CA, CD, DC, DBC, BDB, A^T A, AA^T.$$

   Andernfalls erklären Sie, warum das Produkt nicht definiert ist.

4. Seien

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et } T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $MN = MT$ gilt, obwohl N von T verschieden ist.

5. Seien A und B zwei quadratische $n \times n$ Matrizen so dass $A^2 = B^2 = 0$ gilt. Zeigen Sie, warum $(A+B)(A-B) = 0$ im Allgemeinen nicht gilt. In welchen Fällen trifft es zu?

6. Gegeben die Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ und $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

   1. Berechnen Sie AD sowie DA und erklären Sie, wie sich die Spalten und Zeilen von A durch Multiplikation mit D von rechts bzw. links verändern.
   2. Bestimmen Sie alle 3×3 Diagonalmatrizen M mit $AM = MA$.

7. Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -6 & 13 \end{bmatrix},$$

   (a) unter Zuhilfenahme der Inversenformel für 2×2 Matrizen aus der Vorlesung

   (b) durch elementare Zeilenoperationen angewendet auf $[A\ I]$.

   Nutzen Sie das Ergebnis, um das folgende System zu lösen

$$\begin{aligned} 3x - 7y &= -4 \\ -6x + 13y &= 1. \end{aligned}$$

8. Geben Sie die folgenden 3×3 Elementarmatrizen an:

   - E_1 vertauscht die zweite und dritte Zeile;
   - E_2 multipliziert die zweite Zeile mit 8;
   - E_3 addiert zur dritten Zeile 7 mal die erste Zeile hinzu.

   Sind die Matrizen E_1, E_2 und E_3 invertierbar? Warum? Wenn ja, bestimmen Sie ihre Inversen und die Inverse des Produkts $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$.

Lösung:

1. Wir erhalten:

$$AC = \begin{bmatrix} -21 & 35 \\ 21 & 4 \\ 10 & -21 \end{bmatrix}, \quad BC = \begin{bmatrix} -8 & 35 \\ 23 & -20 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad CB = \begin{bmatrix} -12 & 25 & 11 \\ 31 & -15 & -10 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Es gilt $AB = BA$ nur für $k = 9$.

3.

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 28 \\ -21 & -4 \\ -9 & -4 \end{bmatrix},$$

CA ist nicht definiert, da C weniger Spalten als A Zeilen hat.

$$CD = \begin{bmatrix} 56 & 14 \\ -24 & -6 \end{bmatrix}, \qquad DC = [50], \qquad DBC = [-96],$$

BD ist nicht definiert, da B mehr Spalten als D hat. Daher ist BDB natürlich auch nicht definiert.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 51 & -7 \\ -7 & 29 \end{bmatrix}, \qquad AA^T = \begin{bmatrix} 49 & -7 & -7 \\ -7 & 26 & 11 \\ -7 & 11 & 5 \end{bmatrix}.$$

4.
$$MN = MT = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 21 & -6 \end{bmatrix}.$$

5. Es gilt
$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2.$$
Nach Voraussetzung gilt zusätzlich $A^2 = B^2 = 0$. Daraus folgt
$$(A+B)(A-B) = BA - AB.$$
Im Allgemeinen gilt $AB \neq BA$. Daher ist die Aussage falsch ausser wenn $AB = BA$, das heisst ausser wenn die beiden Matrizen vertauschen.

6. 1. Durch Multiplikation von A mit D von rechts werden die Spalten mit 2, 3 bzw. 4 multipliziert. Wenn man umgekehrt A von links mit D multipliziert, werden die Zeilen mit 2, 3 bzw. 4 multipliziert:
$$AD = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 12 \\ 2 & 12 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad DA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 16 & 20 \end{bmatrix}.$$
   2. Sei
$$M = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$
eine beliebige Diagonalmatrix. Dann gilt
$$AM = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & 2b & 3c \\ a & 4b & 5c \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad MA = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & 2b & 3b \\ c & 4c & 5c \end{bmatrix}.$$
Damit $AM = MA$ gilt, muss $b = a$ und $c = a$ erfüllt sein. Daher sind die einzigen Matrizen M, die mit A vertauschen, d.h. $AM = MA$, die Matrizen λI_3 für $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. (a) Es gilt $ad - bc = -3$ und daher
$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13/3 & -7/3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (b)
$$[A\, I] = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 1 & 0 \\ -6 & 13 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -13 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13/3 & -7/3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

und daher

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -13/3 & -7/3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Das System kann man als $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$ schreiben, wobei

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Das ist äquivalent zu

$$\boldsymbol{z} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Folglich $x = 15$ und $y = 7$.

8.
$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jede Elementarmatrix E ist invertierbar, da jede elementare Zeilenoperation umkehrbar ist. Um E^{-1} zu erhalten, muss man auf den Zeilen der Einheitsmatrix I die elementare Zeilenoperation aufführen, die E in I umformt. Also gilt:

$$E_1 = E_1^{-1}, \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und

$$(E_1E_2E_3)^{-1} = E_3^{-1}E_2^{-1}E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wahr/Falsch
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 2.1

1. Jede Spalte von AB ist eine Linearkombination der Spalten von B mit Gewichten aus der zugehörigen Spalte von A.
2. Es gilt $A^T + B^T = (A + B)^T$.
3. Es gilt $(AB)^T = A^T B^T$.
4. Für eine $n \times n$ Matrix A gilt $\left(A^2\right)^T = \left(A^T\right)^2$.

Kapitel 2.2

1. Die Inverse von AB ist $A^{-1}B^{-1}$, wobei A und B invertierbare $n \times n$ Matrizen sind.
2. Für eine invertierbare $n \times n$ Matrix A ist die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ lösbar.
3. Jede Elementarmatrix ist invertierbar.
4. Wenn $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ und $ab - cd \neq 0$ gilt, dann ist A invertierbar.

5. Es gilt $A = \left(A^{-1}\right)^{-1}$ für jede invertierbare Matrix A.

Kapitel 2.3

1. Wenn die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung hat, dann ist A invertierbar.
2. Falls die Spalten einer $n \times n$ Matrix A den Raum $\mathbb{R}^n$ erzeugen, dann sind die Spalten linear unabhängig.
3. Falls die Spalten einer $n \times n$ Matrix A linear unabhängig sind, dann erzeugen die Spalten den Raum $\mathbb{R}^n$.
4. Für eine $n \times n$ Matrix A hat die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ mindestens eine Lösung.
5. Wenn A^T nicht invertierbar ist, ist auch A nicht invertierbar.
6. Seien A, D $n \times n$ Matrizen mit $AD = I$ (I ist die $n \times n$ Einheitsmatrix). Dann gilt auch $DA = I$.
7. Wenn für eine $n \times n$ Matrix A ein Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist, dann ist die Lösung eindeutig.

Lösung: Kapitel 2.1

1. F
2. W
3. F
4. W

Kapitel 2.2

1. F
2. W
3. W
4. F
5. W

Kapitel 2.3

1. F
2. W
3. W
4. F
5. W
6. W
7. F