École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 4

Abgabe bis **13.10.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

1. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ eine Bijektion. Zeigen Sie, unter Zuhilfenahme der Funktion f, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleich mächtig sind.
2. Sei A eine abzählbare Menge und $B \subseteq A$ eine Teilmenge von A. Zeigen Sie, dass B entweder endlich oder abzählbar ist.
3. Zeigen Sie, dass die Menge der Funktionen $\{f \;:\; (f : \mathbb{N} \to \{0,1\})\}$ überabzählbar unendlich ist.

Aufgabe 2

1. Finden Sie die Standardmatrizen der folgenden linearen Abbildungen
   - $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-5\\3\\6\end{bmatrix}$.
   - $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
     $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.
   - $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\-5\end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\-6\\1\\0\end{bmatrix}$.
2. Geben Sie für die folgenden Beschreibungen einer linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Transformationsmatrix an. Wir nutzen die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$, dh. $\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.
   (a) T lässt $\boldsymbol{e_1}$ unverändert und bildet $\boldsymbol{e_2}$ auf $\boldsymbol{e_2} + 2\boldsymbol{e_1}$ ab.
   (b) T rotiert die Punkte um 270 Grad um den Ursprung.
   (c) T spiegelt Punkte zunächst an der x_1-Achse und spiegelt sie dann an der Geraden $x_1 = x_2$.
3. Entscheiden Sie, ob die folgenden linearen Transformationen injektiv oder surjektiv sind:

(a) $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\5\end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\-6\\1\\0\end{bmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\\x_3+x_4\\0\end{bmatrix}$.

Aufgabe 3

1. Gegeben die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix}4 & -5 & 3\\5 & 7 & -2\\-3 & 2 & -1\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}7 & 0 & -1\\-1 & 5 & 2\end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix}-1 & 5\\4 & -3\\1 & 0\end{bmatrix},$$

berechnen Sie AC, BC und CB.

2. Gegeben

$$A = \begin{bmatrix}3 & -4\\-5 & 1\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix}7 & 4\\5 & k\end{bmatrix},$$

für welche Werte von k gilt $AB = BA$?

3. Gegeben die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix}7 & 0\\-1 & 5\\-1 & 2\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}1 & 4\\-4 & 0\end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix}7\\-3\end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix}8 & 2\end{bmatrix}.$$

Falls das Produkt definiert ist, berechnen Sie:

$$AB, CA, CD, DC, DBC, BDB, A^TA, AA^T.$$

Andernfalls erklären Sie, warum das Produkt nicht definiert ist.

4. Seien

$$M = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix}3 & -8\\2 & 3\end{bmatrix} \quad \text{et } T = \begin{bmatrix}5 & 2\\1 & -2\end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $MN = MT$ gilt, obwohl N von T verschieden ist.

5. Seien A und B zwei quadratische $n \times n$ Matrizen so dass $A^2 = B^2 = 0$ gilt. Zeigen Sie, warum $(A+B)(A-B) = 0$ im Allgemeinen nicht gilt. In welchen Fällen trifft es zu?

6. Gegeben die Matrizen $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 4 & 5\end{bmatrix}$ und $D = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

    1. Berechnen Sie AD sowie DA und erklären Sie, wie sich die Spalten und Zeilen von A durch Multiplikation mit D von rechts bzw. links verändern.
    2. Bestimmen Sie alle 3×3 Diagonalmatrizen M mit $AM = MA$.

7. Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -6 & 13 \end{bmatrix},$$

   (a) unter Zuhilfenahme der Inversenformel für 2×2 Matrizen aus der Vorlesung

   (b) durch elementare Zeilenoperationen angewendet auf $[A\ I]$.

   Nutzen Sie das Ergebnis, um das folgende System zu lösen

$$\begin{aligned} 3x - 7y &= -4 \\ -6x + 13y &= 1. \end{aligned}$$

8. Geben Sie die folgenden 3×3 Elementarmatrizen an:

   - E_1 vertauscht die zweite und dritte Zeile;
   - E_2 multipliziert die zweite Zeile mit 8;
   - E_3 addiert zur dritten Zeile 7 mal die erste Zeile hinzu.

   Sind die Matrizen E_1, E_2 und E_3 invertierbar? Warum? Wenn ja, bestimmen Sie ihre Inversen und die Inverse des Produkts $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 2.1

1. Jede Spalte von AB ist eine Linearkombination der Spalten von B mit Gewichten aus der zugehörigen Spalte von A.
2. Es gilt $A^T + B^T = (A + B)^T$.
3. Es gilt $(AB)^T = A^T B^T$.
4. Für eine $n \times n$ Matrix A gilt $\left(A^2\right)^T = \left(A^T\right)^2$.

Kapitel 2.2

1. Die Inverse von AB ist $A^{-1}B^{-1}$, wobei A und B invertierbare $n \times n$ Matrizen sind.
2. Für eine invertierbare $n \times n$ Matrix A ist die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ lösbar.
3. Jede Elementarmatrix ist invertierbar.
4. Wenn $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ und $ab - cd \neq 0$ gilt, dann ist A invertierbar.
5. Es gilt $A = \left(A^{-1}\right)^{-1}$ für jede invertierbare Matrix A.

Kapitel 2.3

1. Wenn die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung hat, dann ist A invertierbar.
2. Falls die Spalten einer $n \times n$ Matrix A den Raum $\mathbb{R}^n$ erzeugen, dann sind die Spalten linear unabhängig.

3. Falls die Spalten einer $n \times n$ Matrix A linear unabhängig sind, dann erzeugen die Spalten den Raum $\mathbb{R}^n$.

4. Für eine $n \times n$ Matrix A hat die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ mindestens eine Lösung.

5. Wenn A^T nicht invertierbar ist, ist auch A nicht invertierbar.

6. Seien A, D $n \times n$ Matrizen mit $AD = I$ (I ist die $n \times n$ Einheitsmatrix). Dann gilt auch $DA = I$.

7. Wenn für eine $n \times n$ Matrix A ein Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist, dann ist die Lösung eindeutig.