École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

**Lineare Algebra** (Herbst 2014)

# Übung 2

Abgabe bis **29.09.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

### Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass $\sqrt{15}$ keine rationale Zahl ist.

**Lösung:** Der Beweis, dass $\sqrt{15}$ keine rationale Zahl ist, ist analog zum Beweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.
Nehmen wir also an, $\sqrt{15}$ sei eine rationale Zahl. Dann gibt es $p, q \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{p}{q} = \sqrt{15}$. Wenn $p$ und $q$ durch 3 teilbar sind, dann können wir Kürzen und erhalten $p' = p/3$, $q' = q/3$ und $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$. Daher, nehmen wir im Folgenden an, dass $p$ oder $q$ nicht durch 3 teilbar ist.
Nun gilt auf Grund unserer Annahme $\frac{p}{q} = \sqrt{15}$ aber $p^2 = 15\ q^2$. Damit haben wir $3 \mid p$ (3 ist ein Teiler von $p$). Da nicht $p$ und $q$ durch 3 teilbar sind, erhalten wir $3 \not| q$. Da aber $p^2$ eine Quadratzahl ist, ist $9 \mid p^2$. Sei $p' \in \mathbb{N}$ nun so gewählt, dass $p^2 = 9p'^2$. Dies gibt $p^2 = 9p'^2 = 15q^2$. Teilen durch 3 auf beiden Seiten ergibt $5q^2 = 3p'^2$. Dies bedeutet, dass auch $3 \mid q$ und erziehlt einen Widerspruch. Damit ist unsere Annahme ($\sqrt{15}$ sei rational) zu einem Widerspruch geführt worden und somit falsch. Wir haben also bewiesen, dass $\sqrt{15}$ *keine* rationale Zahl ist.

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie für jedes der nachfolgenden linearen Gleichungssysteme (GLS)

- die erweiterte Koeffizientenmatrix
- die reduzierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix
- die Lösungsmenge des Systems.

(1)

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3w &= 13 \\ x - 2y + z + w &= 8 \\ 3x + y + z - w &= 1 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 2x + y + z - 2w &= 1 \\ 3x - 2y + z - 6w &= -2 \\ x + y - z - w &= -1 \\ 6x + z - 9w &= -2 \\ 5x - y + 2z - 8w &= 3 \end{aligned}$$

**Lösung:**
Die erweiterten Koeffizientenmatrizen sind

$$1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 1 & -9 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

und die entsprechenden Matrizen in reduzierter Zeilenstufenform erhält man wie folgt:

$$1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 10 & 38 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -4 & -8 & -33 \\ 0 & 2 & 5 & 10 & 38 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -4 & -8 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -6 & -2 \\ 6 & 0 & 1 & -9 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & -8 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & 3 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & -11 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & -11 & -3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3/11 & 14/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -8/11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -17/11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Im ersten GLS ist $w$ eine freie Variable und die Lösungen können durch $x = -2 + w$, $y = -1$ und $z = 8 - 2w$ beschrieben werden. Als Lösungsmenge erhält man $\mathcal{L} = \{x = -2 + w, y = -1, z = 8 - 2w, w \colon w \in \mathbb{R}\}$.
- Das zweite GLS ist nicht lösbar, da die erweiterte Koeffizientenmatrix eine Zeile der Form $[0\,0\,0\,0\,1]$ enthält, d.h. die letzte Spalte der erweiterten Koeffizientenmatrix ist eine Pivotspalte. Die Lösungsmenge ist also leer, $\mathcal{L} = \emptyset$.

**Aufgabe 3**

1. Gegeben sind die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{bmatrix}.$$

- Für welche Werte von $h$ ist der Vektor $\boldsymbol{w}$ eine Linearkombination von $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$?
- Geben Sie die zugehörigen Koeffizienten $\alpha_1$, $\alpha_2$ der Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ an.

2. Zeigen Sie, dass der Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$ in der durch die Spalten der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$$

erzeugten Ebene im $\mathbb{R}^3$ liegt.

3. Zeigen Sie, dass für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

die Matrixgleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nicht für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ lösbar ist. Beschreiben Sie geometrisch die Menge der Vektoren $\boldsymbol{b}$ für die $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist.

**Lösung:**

1. Jedes Element im Erzeugnis (Spann) von $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ ist von der Form

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = a_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

wobei $a_1$ und $a_2$ reelle Zahlen sind. Der Vektor $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{bmatrix}$ wird durch $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ genau dann erzeugt, wenn es Koeffizienten $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gibt so dass die Vektorgleichung

$$a_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{bmatrix}$$

erfüllt ist.

In Matrixform erhalten wir:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 3/4 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 3/2 & h-3/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 3/2 & h-3/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h+9 \end{bmatrix}$$

Damit die Vektorgleichung lösbar ist, muss $h = -9$ gelten und daher $a_1 = 6$ und $a_2 = -7$.

2. Um herauszufinden, ob der Vektor $\boldsymbol{v}$ in der durch die Spalten von $\boldsymbol{A}$ erzeugten Ebene liegt, lösen wir die Matrixgleichung $\boldsymbol{A}x = v$. Die erweiterte Koeffizientenmatrix des zugehörigen GLS ist $[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{v}]$. Die reduzierte Zeilenstufenform ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und man erhält

$$\boldsymbol{v} = -5 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Der Vektor $\boldsymbol{v}$ liegt also in der von den Spalten von $\boldsymbol{A}$ erzeugten Ebene.

3. Sei $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Die erweiterte Koeffizientenmatrix der Matrixgleichung ist äquivalent zur folgenden Matrix in Zeilenstufenform

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 2b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

Daher ist die Matrixgleichung $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nur dann erfüllbar, wenn $2b_1 + b_2 = 0$. Die Menge von Vektoren $\boldsymbol{b}$ in $\mathbb{R}^2$, für die das GLS lösbar ist, ist eine Ursprungsgerade.

## Aufgabe 4

1. Wir betrachten die beiden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \\ 4x + hy &= 5 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -3x + hy &= \phantom{-}1 \\ 6x + ky &= -3 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Werte für $h$ und $k$ so dass das GLS jeweils

- keine Lösung hat,
- eine eindeutige Lösung hat,
- unendlich viele Lösungen hat.

2. Spannen die Vektoren $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ den Raum $\mathbb{R}^3$ auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Spannen die Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ den Raum $\mathbb{R}^4$ auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Geben Sie die Lösungen der beiden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -5 \\ x_2 - x_3 &= \phantom{-}4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= -2 \end{aligned}$$

in parametrisierter Vektorform an und interpretieren Sie die Lösungsmenge geometrisch.

5. Bestimmen Sie den Kern der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und geben Sie die Lösung in parametrisierter Vektorform an.

**Lösung:**

1. Die erweiterte Koeffizientenmatrix für das erste System ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 4 & h & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & h-8 & 5-4k \end{bmatrix}$$

- Falls $h = 8$ und $k \neq \frac{5}{4}$ gibt es keine Lösung,
- für $h \neq 8$ hat das GLS eine eindeutige Lösung,
- und wenn $h = 8$ und $k = \frac{5}{4}$ gibt es unendlich viele Lösungen.

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des zweiten Systems ist

$$\begin{bmatrix} -3 & h & 1 \\ 6 & k & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & h & 1 \\ 0 & k+2h & -1 \end{bmatrix}$$

- für $k = -2h$ gibt es keine Lösung,
- falls $k \neq -2h$ hat das GLS eine eindeutige Lösung,
- und es gibt keine Werte für $h$ und $k$ für die das GLS unendlich viele Lösungen hat.

2. Es gilt

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Die Matrix in Zeilenstufenform hat ein Pivotelement in jeder Zeile und daher spannen $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ und $\boldsymbol{u}_3$ den Raum $\mathbb{R}^3$ auf. Alternativ kann man zeigen, dass $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

3. Die Matrix $\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}$ hat mehr Zeilen als Spalten. In Zeilenstufenform kann also nicht jede Zeile ein Pivotelement enthalten. Daraus schliessen wir, dass $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ nicht $\mathbb{R}^4$ aufspannen. Alternativ kann man beobachten, dass eine Basis des $\mathbb{R}^4$ 4 Vektoren enthält und daher drei Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ nicht $\mathbb{R}^4$ aufspannen können.

4. Die Matrizen zu den GLS sind in reduzierter Zeilenstufenform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In beiden Fällen ist $x_3$ eine freie Variable und die Lösungen sind

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Lösungen des ersten Systems werden von einem Vektor erzeugt und liegen alle auf einer Geraden durch den Ursprung. Die Lösungen des zweiten Systems können durch eine Gerade beschrieben werden, die durch den Punkt $(7, 4, 0)$ und parallel zur ersten Gerade verläuft.

5. Die Zeilenstufenform von $\boldsymbol{A}$ zeigt, dass es 3 Basisvariablen, nämlich $x_1$, $x_3$ und $x_6$, sowie 3 freie Variablen gibt, nämlich $x_2$, $x_4$ und $x_5$. Daher lässt sich jedes Element des Kerns, das heisst jede Lösung der Matrixgleichung $\boldsymbol{A}x = 0$, wie folgt schreiben (für Gewichte $s, t, u \in \mathbb{R}$):

$$s \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mit anderen Worten, der Kern der Matrix $\boldsymbol{A}$ wird von den Vektoren $\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ erzeugt.

**Wahr/Falsch**
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.
**Kapitel 1.3**

1. Eine andere Schreibweise für den Vektor $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ist $[4, 3]$.

2. Die Punkte $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ liegen auf einer Geraden durch den Ursprung.

3. Ein Beispiel einer Linearkombination von $\boldsymbol{v_1}$ und $\boldsymbol{v_2}$ ist $\frac{1}{2}\boldsymbol{v_1}$.

4. Die Menge $\text{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ kann immer als Ebene dargestellt werden, die den Ursprung enthält.

5. Das GLS mit erweiterter Koeffizentenmatrix $[\boldsymbol{a_1} \quad \boldsymbol{a_2} \quad \boldsymbol{a_3} \quad \boldsymbol{b}]$ ist lösbar genau dann wenn $b \in \text{Span}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ gilt.

6. Der Vektor $\boldsymbol{v}$ ist die Summe der Vektoren $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}$.

**Kapitel 1.4**

1. Der Vektor $\boldsymbol{b}$ ist eine Linearkombination der Spalten einer Matrix $A$ genau dann, wenn die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mindestens eine Lösung hat.

2. Die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar wenn die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A \quad \boldsymbol{b}]$ in jeder Zeile ein Pivotelement enthält.

3. Wenn die Spalten einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ den Raum $\mathbb{R}^m$ aufspannen, dann ist die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar für alle Vektoren $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

4. Jede Linearkombination von Vektoren kann für eine entsprechende Matrix $A$ und einen Vektor $x$ in der Form $A\boldsymbol{x}$ geschrieben werden.

5. Wenn die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist, liegt $\boldsymbol{b}$ im Erzeugnis der Spalten von $A$.

**Kapitel 1.5**

1. Ein homogenes Gleichungssystem ist immer lösbar.

2. Die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ hat nur die triviale Lösung genau dann wenn die Gleichung mindestens eine freie Variable enthält.

3. Die Gleichung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ beschreibt eine Gerade durch den Punkt $\boldsymbol{v}$ parallel zu $\boldsymbol{u}$.

Für die folgenden vier Fragen entscheiden Sie bitte, ob (a) das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ eine nichttriviale Lösung hat und (b) ob die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für jedes $\boldsymbol{b}$ mindestens eine Lösung hat.

- $A$ ist eine $3 \times 3$-Matrix mit drei Pivotelementen.
- $A$ ist eine $4 \times 4$-Matrix mit drei Pivotelementen.
- $A$ ist eine $2 \times 5$-Matrix mit zwei Pivotelementen.
- $A$ ist eine $3 \times 2$-Matrix mit zwei Pivotelementen.

**Lösung: Kapitel 1.3**

1. F
2. F
3. W
4. F
5. W
6. F

**Kapitel 1.4**

1. W
2. F
3. W
4. W
5. W

**Kapitel 1.5**

1. W
2. F
3. F

Systemfragen:

- (a) Nein
  (b) Ja
- (a) Ja
  (b) Nein
- (a) Ja
  (b) Ja
- (a) Nein
  (b) Nein