École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 2

Abgabe bis **29.09.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass $\sqrt{15}$ keine rationale Zahl ist.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für jedes der nachfolgenden linearen Gleichungssysteme (GLS)

- die erweiterte Koeffizientenmatrix
- die reduzierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix
- die Lösungsmenge des Systems.

(1)

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3w &= 13 \\ x - 2y + z + w &= 8 \\ 3x + y + z - w &= 1 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 2x + y + z - 2w &= 1 \\ 3x - 2y + z - 6w &= -2 \\ x + y - z - w &= -1 \\ 6x + z - 9w &= -2 \\ 5x - y + 2z - 8w &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

1. Gegeben sind die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{bmatrix}.$$

   - Für welche Werte von h ist der Vektor $\boldsymbol{w}$ eine Linearkombination von $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$?
   - Geben Sie die zugehörigen Koeffizienten α_1, α_2 der Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ an.

2. Zeigen Sie, dass der Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$ in der durch die Spalten der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$$

erzeugten Ebene im $\mathbb{R}^3$ liegt.

3. Zeigen Sie, dass für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

die Matrixgleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nicht für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ lösbar ist. Beschreiben Sie geometrisch die Menge der Vektoren $\boldsymbol{b}$ für die $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist.

Aufgabe 4

1. Wir betrachten die beiden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \\ 4x + hy &= 5 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -3x + hy &= 1 \\ 6x + ky &= -3 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Werte für h und k so dass das GLS jeweils

- keine Lösung hat,
- eine eindeutige Lösung hat,
- unendlich viele Lösungen hat.

2. Spannen die Vektoren $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ den Raum $\mathbb{R}^3$ auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Spannen die Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ den Raum $\mathbb{R}^4$ auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Geben Sie die Lösungen der beiden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -5 \\ x_2 - x_3 &= 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= -2 \end{aligned}$$

in parametrisierter Vektorform an und interpretieren Sie die Lösungsmenge geometrisch.

5. Bestimmen Sie den Kern der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und geben Sie die Lösung in parametrisierter Vektorform an.

Wahr/Falsch
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.
Kapitel 1.3

1. Eine andere Schreibweise für den Vektor $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ist [4, 3].
2. Die Punkte $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ liegen auf einer Geraden durch den Ursprung.
3. Ein Beispiel einer Linearkombination von $\boldsymbol{v_1}$ und $\boldsymbol{v_2}$ ist $\frac{1}{2}\boldsymbol{v_1}$.
4. Die Menge $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ kann immer als Ebene dargestellt werden, die den Ursprung enthält.
5. Das GLS mit erweiterter Koeffizentenmatrix $[\boldsymbol{a_1} \quad \boldsymbol{a_2} \quad \boldsymbol{a_3} \quad \boldsymbol{b}]$ ist lösbar genau dann wenn $b \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ gilt.
6. Der Vektor $\boldsymbol{v}$ ist die Summe der Vektoren $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}$.

Kapitel 1.4

1. Der Vektor $\boldsymbol{b}$ ist eine Linearkombination der Spalten einer Matrix A genau dann, wenn die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mindestens eine Lösung hat.
2. Die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar wenn die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A \quad \boldsymbol{b}]$ in jeder Zeile ein Pivotelement enthält.
3. Wenn die Spalten einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ den Raum $\mathbb{R}^m$ aufspannen, dann ist die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar für alle Vektoren $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.
4. Jede Linearkombination von Vektoren kann für eine entsprechende Matrix A und einen Vektor x in der Form $A\boldsymbol{x}$ geschrieben werden.
5. Wenn die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist, liegt $\boldsymbol{b}$ im Erzeugnis der Spalten von A.

Kapitel 1.5

1. Ein homogenes Gleichungssystem ist immer lösbar.
2. Die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ hat nur die triviale Lösung genau dann wenn die Gleichung mindestens eine freie Variable enthält.
3. Die Gleichung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ beschreibt eine Gerade durch den Punkt $\boldsymbol{v}$ parallel zu $\boldsymbol{u}$.

Für die folgenden vier Fragen entscheiden Sie bitte, ob (a) das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ eine nichttriviale Lösung hat und (b) ob die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für jedes $\boldsymbol{b}$ mindestens eine Lösung hat.

- A ist eine 3×3-Matrix mit drei Pivotelementen.
- A ist eine 4×4-Matrix mit drei Pivotelementen.
- A ist eine 2×5-Matrix mit zwei Pivotelementen.
- A ist eine 3×2-Matrix mit zwei Pivotelementen.