École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 1

Abgabe bis **23.09.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

1. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $x_1 + 2x_2 = -13$ und $3x_1 - 2x_2 = 1$.

2. Haben die drei Ebenen

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \;=\; 4\,, \quad x_2 - x_3 \;=\; 1 \quad \text{und} \quad x_1 + 3x_2 \;=\; 0$$

mindestens einen gemeinsamen Punkt?

3. Bestimmen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_4 - x_5 &= 12, \\ x_3 + 2x_4 - 4x_2 &= -1, \\ x_5 + 2x_3 - 4x_1 &= -8. \end{aligned}$$

und geben Sie die Einträge $a_{2,3}$ und $a_{1,4}$ an.

4. Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem (GLS) durch elementare Zeilenumformungen auf der erweiterten Koeffizientenmatrix.

(a)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 12, \\ x_3 + 2x_1 - 4x_2 &= -1, \\ x_2 + 2x_3 - 4x_1 &= -8. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 11 \\ -3x_1 + 2x_2 - 1x_3 &= -4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

5. Entscheiden Sie, ob das GLS lösbar ist (ohne es komplett zu lösen).

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_4 &\;=\; -3 \\ 2x_2 + 2x_3 &\;=\; 0 \\ x_3 + 3x_4 &\;=\; 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &\;=\; 5\,. \end{aligned}$$

6. Finden Sie die elementare Zeilenoperation, die die erste Matrix in die zweite überführt, sowie ihre Umkehrung.
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & -5 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

Lösung:

1. Wir betrachten die erweiterte Koeffizientenmatrix und erhalten durch elementare Zeilenumformungen:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -13 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -13 \\ 0 & -8 & 40 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -13 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$
Daher ist der Schnittpunkt der beiden Geraden gegeben durch $x_1 = -3$ und $x_2 = -5$.

2. Wir lösen das GLS mit erweiterter Koeffizientenmatrix:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$
Die dritte Zeile der letzten Matrix zeigt, dass das zugehörige GLS nicht lösbar ist. Daher haben die drei Ebenen keinen gemeinsamen Punkt.

3. Die Einträge sind $a_{2,3} = 1$, $a_{1,4} = 2$. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

4. (a) Ausgehend von der erweiterten Koeffizientenmatrix des GLS erhalten wir durch elementare Zeilenumformungen:
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 4 \\ 0 & -16/3 & 5/3 & -9 \\ 0 & 11/3 & 2/3 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/8 & 23/8 \\ 0 & 1 & -5/16 & 27/16 \\ 0 & 0 & 87/48 & 29/16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Die Lösung des Systems ist also
$$x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1.$$
(b) Die Lösung des zweiten Systems ist
$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4,$$
weil
$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 & 11 \\ -3 & 2 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. Die erweiterte Koeffizientenmatrix kann durch elementare Zeilenumformungen der letzten Zeile auf folgende Form gebracht werden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,. \end{bmatrix}$$

Da diese Matrix keine Zeile der Form $[0\,0\,0\,0\,\alpha]$ für $\alpha \neq 1$, ist das zugehörige GLS lösbar. Da es aber eine Nullzeile enthält, gibt es unendlich viele Lösungen.

6. Auf die zweite Zeile wird dreimal die erste Zeile aufaddiert. Die Umkehrung dieser Operation ist natürlich von der zweiten Zeile dreimal die erste Zeile zu substrahieren.

Aufgabe 2

1. Bringen Sie die folgenden Matrizen in reduzierte Zeilenstufenform

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -6 & 12 & -9 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad , \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Für welche Werte von h stellen die folgenden Matrizen die erweiterte Koeffizientenmatrix eines lösbaren GLS dar?

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

3. Geben Sie die Lösungsmenge des zu der folgenden erweiterten Koeffizientenmatrix gehörigen GLS an

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung:

1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -6 & 12 & -9 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 14 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 14 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -5 & -10 & -17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 17/5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 8 & 16 & 34 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. (a) Es gilt die Äquivalenz von

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 0 & 2h-5 \end{bmatrix}.$$

Das zur letzteren Matrix gehörige GLS ist:

$$\begin{aligned} x - 3y &= h \\ 0 &= 2h - 5; \end{aligned}$$

es ist lösbar genau dann wenn $2h - 5 = 0$, das heisst wenn $h = 5/2$.

(b) Es gilt die Äquivalenz von

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & h & 4 \\ 0 & 3h-6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Das zur letzteren Matrix gehörige GLS ist:

$$\begin{aligned} x + hy &= 4 \\ (3h-6)y &= 4\,. \end{aligned}$$

Es ist lösbar genau dann wenn $3h - 6 \neq 0$, das heisst wenn $h \neq 2$.

3. Es gibt keine Lösung des zugehörigen Systems (wie man an der letzten Zeile erkennt).

Aufgabe 3

In dieser Übung beschäftigen wir uns mit der Notation von Mengen. Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$.
Der Existenzquantor wird mittels $\exists$ geschrieben. Als Beispiel kann man für ein y die Aussage "es existiert eine Zahl x, sodass $y = 3x$" mathematisch auch schreiben als $\exists x : y = 3x$.
Gleichermassen kann man die Aussage "für alle x ist $y = 3x$" auch schreiben als $\forall x : y = 3x$.

1. Beschreiben Sie in Worten die Menge $M_1 = \{n \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, n = 2\,k + 1\}$.
2. Formulieren Sie in mathematischer Schreibweise die Menge aller natürlichen Zahlen die durch 5 teilbar sind.
3. Beschreiben Sie in Worten die Mengen $M_2 \cup M_3$ und $M_2 \cap M_3$ wobei $M_2 = \{n \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, n = 7k\}$ und $M_3 = \{x \ : \ \exists y \in \mathbb{N}, x = 9y\}$.
4. Zeigen Sie, dass $M_2 \cap M_3 = \{q \ : \ \exists p \in M_2, q = 9p\}$.
5. Zeigen Sie, dass $\forall x \in M_2 \cap M_3 \ \exists y \in \{n \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, n = 21k\} : x = 3y$.
6. Was ist die Menge $(\mathbb{N} \setminus \{n \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k\}) \cup \{n \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, n = 9k\}$?

7. Was ist die Menge $\{n \ : \ \exists \ k \in \mathbb{N}, n = 9k\} \setminus \{n \ : \ \exists \ k \in \mathbb{N}, n = 3k\}$?

Lösung:

1. M_1 ist die Menge aller Zahlen die bei Division durch 2 den Rest 1 lassen, d.h. die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen.

2. $\{n \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = 5k\}$.

3. $M_2 \cup M_3$ ist die Menge aller natürlicher Zahlen, die durch 7 oder 9 teilbar sind. $M_2 \cap M_3$ ist die Menge aller natürlicher Zahlen, die durch 7 und 9 teilbar sind, d.h. die Menge aller natürlicher Zahlen die durch 63 teilbar sind $\{n \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = 63k\}$.

4. Sei $q \in M_2 \cap M_3$. Entsprechend Definition von M_2 und M_3 existieren p_1 und p_2, sodass $q = 7p_1 = 9p_2$. Dies bedeutet insbesondere, dass $7 \mid p_2$ (7 ist ein Teiler von p_2). Das bedeutet, dass $p_2 \in M_2$ und damit folgt $q \in \{x : \exists y \in M_2, x = 9y\}$. Wir zeigen nun die Umkehrung. Sei also $q = 9p$ wobei $p \in M_2$. Nach Definition von M_2 existiert ein $a \in \mathbb{N}$, sodass $p = 7a$. Das bedeutet $q = 9p = 9 \cdot 7 \cdot a$. Also ist $q \in M_2 \cap M_3$ da $q = 7 \cdot (9a)$ und $q = 9 \cdot (7a)$.

5. Sei $x \in M_2 \cap M_3$. Dann gibt es p und q, sodass $x = 9p = 7q$. Daher muss $7 \mid p$ und $9 \mid q$. Aus $9 \mid q$ folgt insbesondere, dass $q/3$ eine ganze Zahl ist und $3 \mid (q/3)$. Wir setzen $y = 7q/3$. Nun folgt $x = 3y$ und weiterhin ist $21 \mid y$ da 7 und 3 ein Teiler von y sind.

6. Dies ist die Menge aller natürlichen Zahlen die entweder nicht durch 3 teilbar oder durch 9 teilbar sind. Insbesondere ist dies die Menge $\{n \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k + 1\} \cup \{n \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k + 2\} \cup \{n \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, n = 9k\}$.

7. Dies ist die leere Menge $\emptyset$.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 1.1

1. Jede elementare Zeilenoperation ist umkehrbar.
2. Die Lösung eines linearen Gleichungssystems (GLS) mit Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist eine Liste von reellen Zahlen $(s_1, \ldots, s_n)$, die jede Gleichung des Systems zu einer wahren Aussage macht, wenn die Werte $s_1, \ldots, s_n$ für $x_1, \ldots, x_n$ eingesetzt werden.
3. Zwei Matrizen sind zeilenäquivalent wenn sie die gleiche Anzahl an Zeilen haben.
4. Elementare Zeilenoperationen, die auf die erweiterte Koeffizientenmatrix angewendet werden, verändern niemals die Lösungsmenge des zugehörigen GLS.
5. Zwei äquivalente lineare Gleichungssysteme können verschiedene Lösungsmengen haben.
6. Ein lösbares GLS hat eine oder mehrere Lösungen.

Kapitel 1.2

1. Die Zeilenstufenform einer Matrix ist eindeutig.
2. Die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix ist eindeutig.
3. Wenn die Zeilenstufenform einer erweiterten Koeffizientenmatrix eine Zeile der Form $[0\,0\,0\,5\,0]$ enthält, dann ist das zugehörige GLS unlösbar.
4. Wenn jede Spalte der erweiterten Koeffizientenmatrix ein Pivotelement enthält, dann ist das zugehörige GLS lösbar.
5. Die Pivotposition in einer Matrix hängt davon ab, ob Zeilenvertauschungen bei der Zeilenreduzierung verwendet wurden.
6. Wann immer ein GLS freie Variablen hat, enthält die Lösungsmenge mehrere Lösungen.

Lösung: Kapitel 1.1

1. W
2. W
3. F
4. W
5. F
6. W

Kapitel 1.2

1. F
2. W
3. F
4. F
5. F
6. F