École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

**Lineare Algebra** (Herbst 2014)

# Übung 1

Abgabe bis **23.09.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

## Aufgabe 1

1. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $x_1 + 2x_2 = -13$ und $3x_1 - 2x_2 = 1$.

2. Haben die drei Ebenen

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4\,, \quad x_2 - x_3 = 1 \quad \text{und} \quad x_1 + 3x_2 = 0$$

   mindestens einen gemeinsamen Punkt?

3. Bestimmen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_4 - x_5 &= 12, \\ x_3 + 2x_4 - 4x_2 &= -1, \\ x_5 + 2x_3 - 4x_1 &= -8. \end{aligned}$$

   und geben Sie die Einträge $a_{2,3}$ und $a_{1,4}$ an.

4. Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem (GLS) durch elementare Zeilenumformungen auf der erweiterten Koeffizientenmatrix.

   (a)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 12, \\ x_3 + 2x_1 - 4x_2 &= -1, \\ x_2 + 2x_3 - 4x_1 &= -8. \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 11 \\ -3x_1 + 2x_2 - 1x_3 &= -4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

5. Entscheiden Sie, ob das GLS lösbar ist (ohne es komplett zu lösen).

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_4 &= -3 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5\,. \end{aligned}$$

6. Finden Sie die elementare Zeilenoperation, die die erste Matrix in die zweite überführt, sowie ihre Umkehrung.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & -5 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

**Aufgabe 2**

1. Bringen Sie die folgenden Matrizen in reduzierte Zeilenstufenform

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -6 & 12 & -9 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Für welche Werte von $h$ stellen die folgenden Matrizen die erweiterte Koeffizientenmatrix eines lösbaren GLS dar?

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

3. Geben Sie die Lösungsmenge des zu der folgenden erweiterten Koeffizientenmatrix gehörigen GLS an

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Aufgabe 3**

In dieser Übung beschäftigen wir uns mit der Notation von Mengen. Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$.
Der Existenzquantor wird mittels $\exists$ geschrieben. Als Beispiel kann man für ein $y$ die Aussage "es existiert eine Zahl $x$, sodass $y = 3x$" mathematisch auch schreiben als $\exists x : y = 3x$.
Gleichermassen kann man die Aussage "für alle $x$ ist $y = 3x$" auch schreiben als $\forall x : y = 3x$.

1. Beschreiben Sie in Worten die Menge $M_1 = \{n \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, n = 2\,k + 1\}$.

2. Formulieren Sie in mathematischer Schreibweise die Menge aller natürlichen Zahlen die durch 5 teilbar sind.

3. Beschreiben Sie in Worten die Mengen $M_2 \cup M_3$ und $M_2 \cap M_3$ wobei $M_2 = \{n \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, n = 7k\}$ und $M_3 = \{x \ : \ \exists y \in \mathbb{N}, x = 9y\}$.

4. Zeigen Sie, dass $M_2 \cap M_3 = \{q \ : \ \exists p \in M_2, q = 9p\}$.

5. Zeigen Sie, dass $\forall x \in M_2 \cap M_3 \ \exists y \in \{n \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, n = 21k\} : x = 3y$.

6. Was ist die Menge $(\mathbb{N} \setminus \{n \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k\}) \cup \{n \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, n = 9k\}$?

7. Was ist die Menge $\{n \ : \ \exists\ k \in \mathbb{N}, n = 9k\} \setminus \{n \ : \ \exists\ k \in \mathbb{N}, n = 3k\}$?

**Wahr/Falsch**
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.
**Kapitel 1.1**

1. Jede elementare Zeilenoperation ist umkehrbar.
2. Die Lösung eines linearen Gleichungssystems (GLS) mit Variablen $x_1, \dots, x_n$ ist eine Liste von reellen Zahlen $(s_1, \dots, s_n)$, die jede Gleichung des Systems zu einer wahren Aussage macht, wenn die Werte $s_1, \dots, s_n$ für $x_1, \dots, x_n$ eingesetzt werden.
3. Zwei Matrizen sind zeilenäquivalent wenn sie die gleiche Anzahl an Zeilen haben.
4. Elementare Zeilenoperationen, die auf die erweiterte Koeffizientenmatrix angewendet werden, verändern niemals die Lösungsmenge des zugehörigen GLS.
5. Zwei äquivalente lineare Gleichungssysteme können verschiedene Lösungsmengen haben.
6. Ein lösbares GLS hat eine oder mehrere Lösungen.

**Kapitel 1.2**

1. Die Zeilenstufenform einer Matrix ist eindeutig.
2. Die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix ist eindeutig.
3. Wenn die Zeilenstufenform einer erweiterten Koeffizientenmatrix eine Zeile der Form $[0\,0\,0\,5\,0]$ enthält, dann ist das zugehörige GLS unlösbar.
4. Wenn jede Spalte der erweiterten Koeffizientenmatrix ein Pivotelement enthält, dann ist das zugehörige GLS lösbar.
5. Die Pivotposition in einer Matrix hängt davon ab, ob Zeilenvertauschungen bei der Zeilenreduzierung verwendet wurden.
6. Wann immer ein GLS freie Variablen hat, enthält die Lösungsmenge mehrere Lösungen.