Symbolische Dynamik

Nicolai Hähnle

22. Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Der Sequenzraum

Betrachten wir wie im letzten Vortrag die quadratische Funktion

$$Q_c: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + c$$

für Parameter $c < -(5+2\sqrt{5})/4$. Laut [1] gelten die vorgestellten Ergebnisse auch für $c < -2$, aber einige der hier vorgestellten Beweise können nicht ohne weiteres verallgemeinert werden. Diese Funktion hat zwei Fixpunkte p_+ und p_-. Die Orbits von Punkten außerhalb des Intervals

$$I := [-p_+, p_+]$$

gehen gegen unendlich. Außerdem existiert ein offenes Teilintervall $A_1 \subset I$, das aus allen Punkten in I besteht, die nach einer Iteration das Intervall I verlassen. Die Menge

$$\Lambda := \{x \in \mathbb{R} \mid Q_c^n(x) \in I \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

ist also in $I \setminus A_1$ enthalten.

Sei nun $x \in \Lambda$. Der Orbit von x verlässt Λ nie. Insbesondere bleibt der Orbit von x also in der Menge $I \setminus A_1$, die aus zwei geschlossenen Teilintervallen I_0 und I_1 besteht (siehe Abb. 1). Wir können also die **Folge der Iterierten** definieren als

$$S(x) := (s_0 s_1 s_2 \ldots), \quad s_j := \begin{cases} 0 & \text{falls } Q_c^j(x) \in I_0 \\ 1 & \text{falls } Q_c^j(x) \in I_1 \end{cases}$$

Der Orbit des Fixpunktes p_+ liegt immer in I_1, also ist $S(p_+) = (111\ldots)$. Analog liegt der Orbit des Fixpunktes p_- immer in I_0, also ist $S(p_-) = (000\ldots)$. Der Punkt

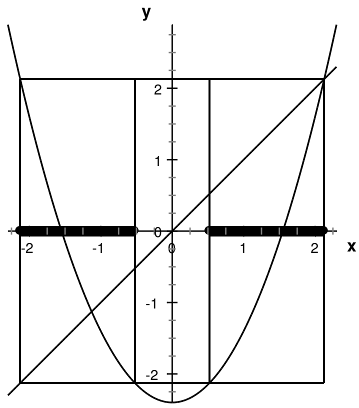

Abbildung 1: Die quadratische Funktion Q_c für $c = -2,4$

$-p_+$ hat den Orbit $-p_+, p_+, p_+, \ldots$, also ist $S(-p_+) = (0111\ldots)$. Allgemein sehen wir, dass sich die Folge $S(x)$ eines periodischen Punktes x wiederholt.

Wir wollen jetzt die quadratische Funktion verlassen, und Folgen über 0 und 1 genauer untersuchen. Dazu bezeichnen wir mit Σ den **Sequenzraum**

$$\Sigma := \{(s_0 s_1 s_2 \ldots) \mid s_j \in \{0,1\}\}$$

Wir wollen diesem Raum eine geometrische Struktur geben, indem wir den Abstand zweier Punkte in Σ definieren. Der grundlegende Gedanke hierbei ist, dass die ersten Glieder der Folgen einen großen Einfluß auf den Abstand haben, die hinteren Glieder dagegen einen kleinen Einfluß. Dazu definieren wir für $s = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$, $t = (t_0 t_1 t_2 \ldots) \in \Sigma$ den Abstand als:

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}$$

Die Reihe $d(s,t)$ konvergiert absolut, da sie wegen $0 \leq |s_k - t_k| \leq 1$ durch die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k$ majorisiert wird. Durch $d(s,t)$ ist also eine Funktion $d : \Sigma \times \Sigma \to \Sigma$ gegeben.

Proposition 1.1. *$d : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$ ist eine Metrik.*

Beweis. Da die einzelnen Summanden von $d(s,t)$ nicht negativ sind, ist $d(s,t) = 0$ genau dann, wenn $s_k = t_k$ für alle k, also genau dann wenn $s = t$.

Die Symmetrie ist ebenfalls klar, da $|s_k - t_k| = |t_k - s_k|$.

Für $s = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$, $t = (t_0 t_1 t_2 \ldots)$, $r = (r_0 r_1 r_2 \ldots) \in \Sigma$ gilt die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(s,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - r_k| + |r_k - t_k|}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - r_k|}{2^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|r_k - t_k|}{2^k} = d(s,r) + d(r,t) \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir die absolute Konvergenz der Reihe. □

Die Intuition, dass Folgen in (Σ, d) nahe beieinander liegen, wenn sie in den ersten Folgenglieder übereinstimmen, präzisiert der folgende Satz.

Satz 1.2. *Seien $s = (s_i)$, $t = (t_i) \in \Sigma$.*

a) $s_i = t_i$ für alle $i \leq n \implies d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$.

b) $d(s,t) < \frac{1}{2^n} \implies s_i = t_i$ für alle $i \leq n$.

Beweis.

a) Hier müssen wir den Abstand nur ausrechnen und abschätzen:

$$\begin{aligned} d(s,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

b) Angenommen, $s_j \neq t_j$ für ein $j \leq n$. Dann gilt:

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \geq \frac{|s_j - t_j|}{2^j} = \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$$

Dies ist ein Widerspruch, also gilt $s_i = t_i$ für alle $i \leq n$. □

Bemerkung 1.3. In Satz 1.2 gilt keine Äquivalenz. Betrachte zum Beispiel die Punkt $s = (000\ldots)$ und $t = (00100\ldots)$. Es gilt $d(s,t) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$, aber $s_2 = 0 \neq 1 = t_2$. Betrachte nun die Folge $u = (000111\ldots)$. Hier gilt:

$$d(s,u) = \sum_{k=3}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

Mit diesem Handwerkszeug wollen wir nun ein dynamisches System in (Σ, d) untersuchen. Dabei lassen wir uns zunächst von der quadratischen Funktion Q_c leiten. Wenn die Folge $S(x) = s_0 s_1 s_2 \ldots$ für $x \in \Lambda$ ist, so können wir uns an Hand der Definition leicht überlegen, dass $S(Q_c(x)) = s_1 s_2 s_3 \ldots$ die Folge ist, bei der einfach das erste Folgenglied wegfällt. Dies motiviert die Definition der **Verschiebungsabbildung**

$$\sigma : \Sigma \to \Sigma,\ \sigma(s_0 s_1 s_2 s_3 \ldots) := (s_1 s_2 s_3 \ldots)$$

Diese verschiebt einfach alle Einträge eines Punktes um eine Stelle nach links und lässt dabei den ersten Eintrag wegfallen, zum Beispiel:

$$\begin{aligned}\sigma(010101\ldots) &= \sigma(10101\ldots)\\ \sigma(101010\ldots) &= \sigma(01010\ldots)\\ \sigma(011111\ldots) &= \sigma(11111\ldots)\end{aligned}$$

Wir können σ leicht iterieren, denn σ^n verschiebt einfach alle Einträge eines Punktes um n Stellen nach links:

$$\sigma^n(s_0 s_1 s_2 \ldots) = (s_n s_{n+1} s_{n+2} \ldots)$$

Dadurch können wir periodische Punkte bezüglich σ sehr leicht charakterisieren.

Proposition 1.4. *$s = (s_0 s_1 s_2 \ldots) \in \Sigma$ hat genau dann die (nicht notwendigerweise minimale) Periode k bezüglich σ, wenn für alle $n \geq 0$ gilt: $s_n = s_{n+k}$. Wir schreiben dann auch $s = (\overline{s_0 s_1 \ldots s_{k-1}})$.*

Beweis.

„$\Rightarrow$“ $(s_0 s_1 s_2 \ldots) = s = \sigma^k(s) = (s_k s_{k+1} s_{k+2} \ldots)$

„$\Leftarrow$“ $\sigma^k(s) = (s_k s_{k+1} s_{k+2} \ldots) = (s_0 s_1 s_2 \ldots) = s$ □

Es gibt also zum Beispiel genau zwei Fixpunkte, nämlich $(\overline{0}) = (000\ldots)$ und $(\overline{1}) = (111\ldots)$. Außerdem gibt es genau einen Zyklus der Länge zwei, nämlich den Zyklus aus den beiden Punkten $(\overline{01})$ und $(\overline{10})$. Im Gegensatz zur quadratischen Funktion ist es hier sehr einfach, beliebige n-periodische Punkte zu finden, indem wir einfach einen Block aus n Nullen und Einsen beliebig oft wiederholen.

Satz 1.5. *Die Verschiebungsabbildung σ ist stetig.*

Beweis. Sei $s = (s_0 s_1 s_2 \ldots) \in \Sigma$ und $\varepsilon > 0$. Wähle ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ und setze $\delta := \frac{1}{2^{n+1}}$.

Sei nun $t = (t_0 t_1 t_2 \ldots) \in \Sigma$ mit $d(s,t) < \delta$. Nach Satz 1.2 stimmen s und t in den Stellen 0 bis $n+1$ überein. Also stimmen $\sigma(s) = (s_1 s_2 \ldots)$ und $\sigma(t) = (t_1 t_2 \ldots)$ in den Stellen 0 bis n überein, nach Satz 1.2 gilt also:

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Damit ist σ stetig in s. s war beliebig, also ist σ insgesamt stetig. □

2 Konjugiertheit

An den Beispielen zu periodischen Punkten von σ haben wir gesehen, dass σ ein dynamisches System ist, dass sehr viel leichter zu greifen ist als das komplizierte Verhalten der quadratische Funktion Q_c auf der Menge Λ. Im Folgenden werden wir zeigen, dass diese beiden Systeme dennoch in einem gewissen Sinn „gleich" sind. Zunächst präzisieren wir den Begriff der „Gleichheit".

Definition 2.1. *Seien X, Y topologische Räume. Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ heißt* ***Homöomorphismus****, wenn f und f^{-1} stetig sind. Wenn ein Homöomorphismus zwischen X und Y existiert, so heißen X und Y homöomorph.*

Definition 2.2. *Zwei Funktionen $F : X \to X$ und $G : Y \to Y$ heißen* ***konjugiert****, wenn ein Homöomorphismus $h : X \to Y$ existiert mit:*

$$h \circ F = G \circ h$$

Die Konjugiertheit bedeutet insbesondere, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h} \\ Y & \xrightarrow[G]{} & Y \end{array}$$

Ein Iterationsschritt von F kann also mit einer Iteration von G identifiziert werden und umgekehrt. Genau diese Konjugiertheit werden wir im Folgenden für σ und Q_c zeigen. Als Homöomorphismus kommt dabei natürlich die Funktion S in Frage, die jedem $x \in \Lambda$ die Folge der Iterierten zuordnet. Wir zeigen zunächst den einfacheren Teil der Konjugiertheit.

Proposition 2.3. *Sei Q_c die quadratische Funktion eingeschränkt auf Λ. Dann gilt: $S \circ Q_c = \sigma \circ S$*

Beweis. Sei $x \in \Lambda$. Setze $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) := S(x) \in \Sigma$. Nach Definition von S gilt:

$$\begin{aligned} x &\in I_{s_0} \\ Q_c(x) &\in I_{s_1} \\ &\vdots \\ Q_c^n(x) &\in I_{s_n} \end{aligned}$$

Durch einfache Verschiebung von Indizes erhalten wir die Folge der Iterierten von $Q_c(x)$:

$$\begin{aligned} Q_c(x) &\in I_{s_1} \\ Q_c(Q_c(x) &\in I_{s_2} \\ &\vdots \\ Q_c^n(Q_c(x)) &\in I_{s_{n+1}} \end{aligned}$$

Also gilt: $S(Q_c(x)) = (s_1 s_2 s_3 \ldots)$. Andererseits ist σ gerade so definiert, dass gilt:

$$\sigma(S(x)) = \sigma(s_0 s_1 s_2 \ldots) = (s_1 s_2 s_3 \ldots)$$

Also gilt die $S(Q_c(x)) = \sigma(S(x))$. $\square$

Wir können dieses Ergebnis wieder in einem kommutativen Diagramm veranschaulischen:

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "Q_c"] \arrow[d, "S"'] & \Lambda \arrow[d, "S"] \\ \Sigma \arrow[r, "\sigma"'] & \Sigma \end{tikzcd}$$

Per Induktion lässt sich dieses Ergebnis noch verallgemeinern, da:

$$S \circ Q_c^2 = (S \circ Q_c) \circ Q_c = \sigma \circ S \circ Q_c = \sigma \circ (\sigma \circ S) = \sigma^2 \circ Q_c$$

Entsprechend gilt dann allgemein: $S \circ Q_c^n = \sigma^n \circ S$

Wir müssen noch zeigen, dass S wirklich ein Homöomorphismus ist. Dazu führen wir zunächst die Menge

$$I_{s_0 s_1 \ldots s_n} := \{x \in I \mid x \in I_{s_0}, Q_c(x) \in I_{s_1}, \ldots, Q_c^n(x) \in I_{s_n}\}$$

aller Punkte ein, deren Orbit sich an den ersten $n+1$ Stellen in den durch $s_0, \ldots, s_n$ bestimmten Teilintervallen befindet. Beachte, dass $I_{s_0 \ldots s_n} \not\subseteq \Lambda$.

Lemma 2.4.

a) $I_{s_0 \ldots s_n} \subset I_{s_0 \ldots s_{n-1}}$

b) $I_{s_0 \ldots s_n}$ *ist ein abgeschlossenes Intervall.*

Beweis.

a) klar.

b) Beweis durch Induktion. Für $n = 0$ ist diese Aussage bereits bekannt.

Sei also $n > 0$ und die Aussage bewiesen für $n' = n-1$.

$$\begin{aligned}
I_{s_0\dots s_n} &= I_{s_0} \cap \{x \in I \mid Q_c(x) \in I_{s_1}\} \cap \dots \cap \{x \in I \mid Q_c^n(x) \in I_{s_n}\} \\
&= I_{s_0} \cap Q_c^{-1}(I_{s_1}) \cap Q_c^{-2}(I_{s_2}) \cap \dots \cap Q_c^{-n}(I_{s_n}) \\
&= I_{s_0} \cap Q_c^{-1}(I_{s_1}) \cap Q_c^{-1}(Q_c^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap Q_c^{-1}(Q_c^{-(n-1)}(I_{s_n}) \\
&= I_{s_0} \cap Q_c^{-1}(I_{s_1} \cap Q_c^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap Q_c^{-(n-1)}(I_{s_n})) \\
&= I_{s_0} \cap Q_c^{-1}(I_{s_1\dots s_n})
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $I_{s_1\dots s_n} \subset I_{s_1}$ ein abgeschlossenes Intervall. Das Urbild besteht aus zwei abgeschlossenen Intervallen, ein Teilintervall von I_0 und ein Teilintervall von I_1. Durch den Schnitt mit I_{s_0} bleibt genau eines dieser abgeschlossenen Intervalle übrig. □

Satz 2.5. *$S : \Lambda \to \Sigma$ ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Seien $x, y \in \Lambda$ mit $S(x) = S(y)$. Daraus folgt sofort, dass sich $Q_c^n(x)$ und $Q_c^n(y)$ für alle $n \geq 0$ im selben Teilinterval I_0 oder I_1 befinden. In diesen beiden Intervallen gilt jeweils $|Q_c'(x)| > \mu > 1$ für ein festes $\mu \in \mathbb{R}$. Aus dem Mittelwertsatz folgt damit:

$$|Q_c^n(x) - Q_c^n(y)| \geq \mu^n |x-y|$$

Wenn $x \neq y$ geht die rechte Seite gegen unendlich, was ein Widerspruch dazu ist, dass sich die Orbits von x und y in der beschränkten Menge Λ befinden. Also muss $x = y$ gelten. Damit ist S injektiv.

Sei $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma$. Betrachte die Folge aus abgeschlossenen Intervallen:

$$I_{s_0} \supset I_{s_0 s_1} \supset \dots \supset I_{s_0\dots s_n} \supset I_{s_0\dots s_{n+1}} \supset \dots$$

Das Prinzip der Intervallschachtelung besagt, dass der Schnitt einer derart geschachtelten Folge von abgeschlossenen Intervallen nicht leer ist, d.h. es gilt:

$$M := \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0\dots s_n} \neq \emptyset$$

Wähle ein $x \in M$. Für alle $n \geq 0$ gilt $Q_c^n(x) \in I_{s_n}$, also ist $S(x) = s$. Damit ist S surjektiv.

Seien $x \in \Lambda$ und $\varepsilon > 0$. Wähle ein $n > 0$ mit $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Sei $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$. Dann gilt $x \in I_{s_0\dots s_n}$. Die abgeschlossenen Intervalle $I_{t_0\dots t_n}$ sind disjunkt, und Λ ist in ihrer Vereinigung enthalten. Also gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $y \in \Lambda$ mit $|y - x| < \delta$ gilt: $y \in I_{s_0\dots s_n}$. Die ersten $n+1$ Komponenten von $S(x)$ sind also gleich denen von $S(y)$. Aus Satz 1.2 folgt dann, dass $d(x,y) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Also ist S in x stetig. x war beliebig, also ist S insgesamt stetig.

Die Menge Λ ist kompakt (Λ entsteht durch Subtraktion von offenen Intervallen, also ist Λ abgeschlossen) und Σ ist ein metrischer Raum, also ist S^{-1} automatisch stetig. □

3 Chaos

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Frage, wie wir Chaos beschreiben können. Die hier vorgestellte Charakterisierung ist aus [1] entnommen. Wir betrachten eine dynamisches System $F : X \to X$ in einem metrischen Raum (X,d).

Wir sagen, F ist **transitiv**, wenn zu jedem $x, y \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein Punkt $z \in X$ existiert mit:

$$d(F^k(z),x) < \varepsilon \text{ und } d(F^l(z),y) < \varepsilon \text{ für geeignete } k,l \geq 0$$

Wir können dies so interpretieren, dass keine Teilmenge von X für sich alleine betrachtet werden kann, da es immer Orbits gibt, die Teilmengen von X miteinander „verbinden". X ist also in diesem Sinne unzerlegbar.

Außerdem sagen wir, F **hängt stark vom Anfangszustand ab**, wenn es ein $\beta > 0$ gibt, so dass zu jedem $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $y \in X$ existiert mit:

$$d(F^k(x),F^k(y)) \geq \beta \text{ für ein } k > 0$$

Man beachte, dass β nicht von x abhängt. Es gibt also zu jedem Punkt x einen beliebig nahen Punkt y, dessen Orbit an mindestens einer Stelle sehr weit vom Orbit von y entfernt liegt. Die Orbits können sich nach dieser Stelle durchaus auch wieder nahe kommen, aber zumindest zeitweise sind die Orbits getrennt.

Wir nennen ein dynamisches System **chaotisch**, wenn es diese beiden Eigenschaften erfüllt und außerdem die Menge der periodischen Punkte von F dicht in X liegt, d.h.

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists y \in X : d(x,y) < \varepsilon \text{ und } y \text{ ist periodisch}$$

Proposition 3.1. *$\sigma : \Sigma \to \Sigma$ ist transitiv.*

Beweis. Betrachte den Punkt

$$\hat{s} := (0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ \dots\ 0000\ 0001\ \dots)$$

der zunächst aus allen Blöcken der Länge 1, dann aus allen Blöcken der Länge 2, usw. besteht. Wir werden sehen, dass der Orbit von $\hat{s}$ an jeden Punkt in Σ beliebig nahe herankommt.

Sei dazu $x = (x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $n > 0$ so, dass $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Wähle dann k so, dass

$$\sigma^k(\hat{s}) = (s_k s_{k+1} \dots) = (x_0 x_1 \dots x_n s_{k+n+1} \dots)$$

Dies ist möglich, da in $\hat{s}$ jeder Block der Länge $n+1$ mindestens einmal auftritt. Nach Satz 1.2 gilt:

$$d(\sigma^k(\hat{s}),x) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Der Orbit von $\hat{s}$ liegt also dicht in Σ und kommt damit beliebig nahe an zwei beliebige Punkte. Also ist σ transitiv. $\square$

Proposition 3.2. $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ *hängt stark vom Anfangszustand ab.*

Beweis. Setze $\beta := 2$. Seien $x = (x_0 x_1 \dots) \in \Sigma$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Konstruiere $y \in \Sigma$ als:

$$y := (x_0 \dots x_n y_{n+1} y_{n+2} \dots) \text{ wobei } y_k \neq x_k \text{ für } k > n$$

Mit Satz 1.2 sehen wir sofort:

$$d(x,y) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Andererseits unterscheidet sich $\sigma^{n+1}(x)$ an jeder Stelle von $\sigma^{n+1}(y)$:

$$d(\sigma^{n+1}(x), \sigma^{n+1}(y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \geq \beta$$

Damit divergieren die Orbits von x und y stark und die Behauptung ist gezeigt. □

Proposition 3.3. *Die periodischen Punkte von σ liegen dicht in Σ.*

Beweis. Seien $x = (x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Konstruiere $y \in \Sigma$ als:

$$y := (\overline{x_0 \dots x_n}) = (x_0 \dots x_n x_0 \dots x_n \dots)$$

y ist ein Punkt der (nicht notwendigerweise minimalen) Periode $n+1$. Gleichzeitig gilt, da x und y in den ersten $n+1$ Stellen gleich sind:

$$d(x,y) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Damit liegen die periodischen Punkte von σ dicht in Σ. □

Mit sehr einfachen und anschaulichen Mitteln konnten wir zeigen, dass σ chaotisch ist. Wie mächtig die symbolische Dynamik ist werden wir jetzt sehen, da sich dieses Ergebnis mit Hilfe der Konjugiertheit auf Q_c auf Λ übertragen lässt.

Lemma 3.4. *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige und surjektive Funktion. Wenn $M \subseteq X$ dicht in X liegt, dann liegt $f(M)$ dicht in Y.*

Beweis. Sei $y_0 \in Y$ und $\varepsilon > 0$. $U := B_Y(y_0; \varepsilon)$ sei die offene Kugel um y_0 mit Radius ε. Betrachte das Urbild dieser Menge $f^{-1}(U)$. Da f surjektiv ist, ist das Urbild nicht leer, und da f stetig ist ist das Urbild offen. Da M dicht in X liegt existiert zu einem beliebig ausgewählten $x_0 \in f^{-1}(U)$ ein $x \in M$ mit:

$$x \in f^{-1}(U) \implies y := f(x) \in U \implies d_Y(y_0, y) < \varepsilon \text{ und } y \in f(M)$$

Da $y_0 \in Y$ beliebig war, liegt $f(M)$ dicht in Y. □

Satz 3.5. *$Q_c : \Lambda \to \Lambda$ ist chaotisch.*

Beweis. Die periodischen Punkte von σ liegen dicht in Σ. S^{-1} ist stetig und surjektiv, also liegen nach Lemma 3.4 die Bilder der periodischen Punkte von σ unter S^{-1} dicht in Λ. Diese sind aber wegen der Konjugierheit periodisch bzgl. Q_c, also liegen die bzgl. Q_c periodischen Punkte dicht in Λ.

Im Beweis von Prop. 3.1 haben wir gesehen, dass es einen Punkt $\hat{s}$ gibt, dessen Orbit dicht in Σ liegt. Also liegt der Orbit von $S^{-1}(\hat{s})$ dicht in Λ und damit ist Q_c auf Λ transitiv.

Es bleibt zu zeigen, dass Q_c stark abhängig vom Anfangszustand ist. Wähle dazu β kleiner als der Abstand der beiden Intervalle I_0 und I_1. Sei $x \in \Lambda$ und $\varepsilon > 0$. Da S ein Homöomorphismus ist existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\forall s \in S : (d(s, S(x)) < \delta \implies |S^{-1}(s) - x| < \varepsilon$$

Nach 3.2 existiert ein s mit $d(s, S(x)) < \delta$, so dass $d(\sigma^k(s), \sigma^k(S(x))) > 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Auf Grund der Konjugiertheit bedeutet dies, dass $Q_c^k(S^{-1}(s))$ in einem anderen Intervall I_j liegt als $Q_c^k(x)$, der Abstand zwischen diesen beiden Punkten also größer ist als β. Andererseits ist $|S^{-1}(s) - x| < \varepsilon$, also folgt die Behauptung. $\square$

Literatur

[1] Robert L. Devaney: *A first course in chaotic dynamical systems*, Addison Wesley (1992)