

Objectifs

- ▶ Réseau, flot de s à t
- ▶ Flot max et coupe min
- ▶ Intégrité
- ▶ Algorithme de Ford & Fulkerson
- ▶ Algorithme de Edmonds & Karp

Définition 4.46 (Réseau, flot de s à t)

Un réseau avec des capacités est représenté par un graphe orienté simple $D = (V, A)$ et une **fonction de capacité** $u: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Une fonction $f: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est appelée un **flot de s à t** , si

$$\sum_{e \in \delta^{out}(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^{in}(v)} f(e), \text{ pour tout } v \in V - \{s, t\}, \quad (36)$$

où $s, t \in V$. Le flot est **admissible**, si $f(e) \leq u(e)$ pour tout $e \in A$. La **valeur** de f est défini comme $value(f) = \sum_{e \in \delta^{out}(s)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{in}(s)} f(e)$. Le **problème de flot maximal de s à t** est le problème de déterminer un flot maximal de s à t qui est admissible.

Coupes

Pour $U \subseteq V$, $\delta^{in}(U)$ dénote les arcs qui entrent dans U et $\delta^{out}(U)$ dénote les arcs sortant de U . Des ensembles d'arcs de la forme $\delta^{out}(U)$ sont appelés une **coupes** de D . La **capacité d'une coupe** $u(\delta^{out}(U))$ est la somme des capacités de ses arcs.

$$\max \sum_{e \in \delta^{out}(s)} x(e) - \sum_{e \in \delta^{in}(s)} x(e) \quad (37)$$

$$\sum_{e \in \delta^{out}(v)} x(e) = \sum_{e \in \delta^{in}(v)} x(e), \text{ pour tout } v \in V - \{s, t\} \quad (38)$$

$$x(e) \leq u(e), \text{ pour tout } e \in A \quad (39)$$

$$x(e) \geq 0, \text{ pour tout } e \in A \quad (40)$$

Définition 4.47 (Fonction d'excès)

Pour tout $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction d'excès ; $exces_f: 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $exces_f(U) = \sum_{e \in \delta^{in}(U)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{out}(U)} f(e)$.

Remarque

Si le PL est borné et les capacités sont des nombres entiers, le PL a une solution optimale intégrale, dès que la **matrice d'incidence sommets-arcs d'un graphe orienté** est totalement unimodulaire.

Définition 4.48 (Fonction d'excès)

Pour tout $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction d'excès ; $\text{exces}_f: 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\text{exces}_f(U) = \sum_{e \in \delta^{in}(U)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{out}(U)} f(e)$.

Théorème 4.49

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté, soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $U \subseteq V$, alors

$$\text{exces}_f(U) = \sum_{v \in U} \text{exces}_f(v). \quad (41)$$

Théorème 4.50 (Dualité faible)

Soit f un flot admissible de s à t et soit $\delta^{out}(U)$ une coupe de $s - t$, alors $value(f) \leq u(\delta^{out}(U))$.

Définition 4.51 (Graphe résiduel)

Soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ et $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ où $0 \leq f \leq u$. Considérons l'ensemble d'arcs

$$A_f = \{a \mid a \in A, f(a) < u(a)\} \cup \{a^{-1} \mid a \in A, f(a) > 0\}. \quad (42)$$

Le graphe orienté $D(f) = (V, A_f)$ est appelé **graphe résiduel** de f (pour des capacités u).

Corollaire 4.52

Soit f un flot admissible de s à t et supposons qu'il n'y a pas de chemin de s à t dans $D(f)$, alors f est de valeur maximale.

Définition 4.53 (Marche non-orienté)

Une **marche non-orienté** est une séquence de la forme

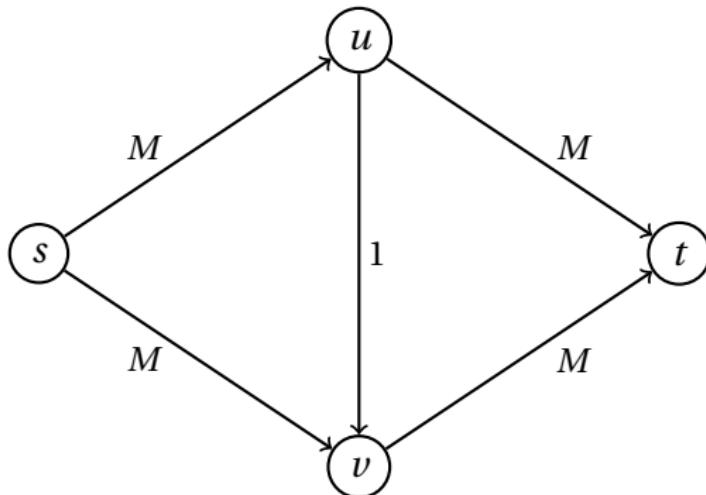
$P = (v_0, a_1, v_1, \dots, v_{m-1}, a_m, v_m)$, où $a_i \in A$ pour $i = 1, \dots, m$ et $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ ou $a_i = (v_i, v_{i-1})$. Si les sommets v_0, \dots, v_m sont tous différents, alors P est un **chemin non-orienté**.

Tout chemin orienté P dans $D(f)$ induit un chemin non-orienté dans D . Définissons pour un tel chemin P le vecteur $\chi^P \in \{0, \pm 1\}^A$ comme

$$\chi^P(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ traverse } a, \\ -1 & \text{si } P \text{ traverse } a^{-1}, \\ 0 & \text{si } P \text{ ne traverse ni } a \text{ ni } a^{-1}. \end{cases} \quad (43)$$

Théorème 4.54 (Théorème du flot max et de la coupe min, dualité forte)

La valeur maximale d'un flot admissible de s à t est égale à la capacité d'une coupe minimale de $s - t$.



Corollaire 4.55 (Théorème d'intégrité)

Si $u(a) \in \mathbb{N}$ pour tout $a \in A$, alors il existe un flot maximal entier ($f(a) \in \mathbb{N}$ pour tout $a \in A$).

Théorème 4.56

Si à chaque itération nous choisissons un plus court chemin de s à t dans $D(f)$ comme chemin d'augmentation de flot, le nombre d'itérations est au plus $|V| \cdot |A|$.

Définition 4.57

Soient $D = (V, A)$ un graphe orienté, $s, t \in V$ et $\mu(D)$ la longueur d'un plus court chemin de s à t . Soit $\alpha(D)$ l'ensemble d'arcs contenu dans au moins un des plus courts chemins de s à t .

Théorème 4.58

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté et $s, t \in V$. Définissons $D' = (V, A \cup \alpha(D)^{-1})$. Alors $\mu(D) = \mu(D')$ et $\alpha(D) = \alpha(D')$.

Corollaire 4.59

Un flot maximal peut être déterminé en temps $O(n m^2)$.

Objectifs

- ▶ Réseau, flot de s à t
- ▶ Flot max et coupe min
- ▶ Intégrité
- ▶ Algorithme de Ford & Fulkerson
- ▶ Algorithme de Edmonds & Karp

Objectifs

- ▶ Réseau, flot de s à t ✓
- ▶ Flot max et coupe min ✓
- ▶ Intégrité ✓
- ▶ Algorithme de Ford & Fulkerson ✓
- ▶ Algorithme de Edmonds & Karp ✓