Objectifs

- Notation O, Ω, Θ
- Graphes orientés et leurs représentations
- Chemins plus courts (breadth-first-search)
- Chemin plus courts (Bellmann-Ford)

Définition 4.34 (Notation O, Ω, Θ)

Soient $T, f : \mathbb{R} - \mathbb{R}$ deux fonctions :

- $T(n)$ est dans $O(f(n))$, s'ils existent des constantes positives $n_o \in \mathbb{R}_{>0}$ et $c \in \mathbb{R}_{>0}$ telles que $T(n) \leqslant c \cdot f(n)$ pour tout $n \geqslant n_0$.
- $T(n)$ est dans $\Omega(f(n))$, s'ils existent des constantes $n_o \in \mathbb{R}_{>0}$ et $c \in \mathbb{R}_{>)}$ telles que $T(n) \geqslant c \cdot f(n)$ pour tout $n \geqslant n_0$.
- $T(n)$ est dans $\Theta(f(n))$ si $T(n)$ est dans $O(f(n))$ et aussi dans $\Omega(f(n))$.

Définition 4.35

Un graphe orienté est un couple $G = (V, A)$, où V est un ensemble fini, dont les éléments sont appelés sommets de G et $A \subseteq (V \times V)$ est l'ensemble des arcs de G. Nous indiquons un arc par ses deux sommets définissant $(u, v) \in A$. Les sommets u et v sont appelés extrémité initiale et extrémité finale de l'arc (u, v) respectivement.

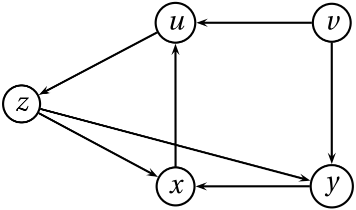


FIGURE: Exemple d'un graphe orienté avec 5 sommets et 7 arcs.

Définition 4.36 (Marche, chemin, distance)

Une marche est une séquence de la forme

$$P = (v_0, a_1, v_1, \ldots, v_{m-1}, a_m, v_m),$$

où $a_i = (v_{i-1}, v_i) \in A$ pour $i = 1, \ldots, m$. Si les sommets $v_0, \ldots, v_m$ sont tous différents alors P est un chemin. La longueur de P est m. La distance entre deux sommets u et v est la longueur d'un plus court chemin de u à v qu'on note par $d(u, v)$.

Exemple 4.37

Ce qui suit représente une marche et un chemin dans le graphe de la Figure 11.

$$u, (u, z), z, (z, x), x, (x, u), u, (u, z), z, (z, y), y$$
$$u, (u, z), z, (z, y), y$$

Représentation

Un graphe ayant n sommets est représenté comme un tableau $A[v_1, \ldots, v_n]$, où la composante $A[v_i]$ est un pointeur vers une liste de sommets, les voisins de v_i. $N(v_i) = \{u \in V : (v_i, u) \in A\}$.

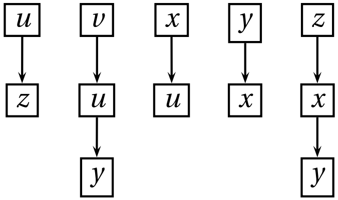


FIGURE: Représentation du graphe dans la Figure 11 par liste d'adjacence.

Lemme 4.38

Soit $V_i \subseteq V$ *l'ensemble de sommets qui sont à distance i de s. Pour* $i = 0, \ldots, n-1$*, l'ensemble* V_{i+1} *est égal à l'ensemble de sommets* $v \in V \setminus (V_0 \cup \cdots \cup V_i)$ *tel qu'il existe un arc* $(u, v) \in A$ *avec* $u \in V_i$*.*

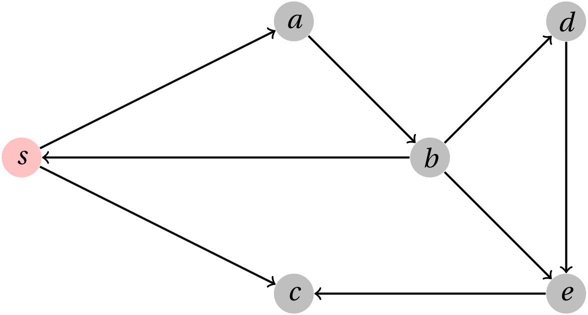
L'algorithme maintient à jour les tableaux

$$D[v_1 = s, v_2, \ldots, v_n]$$
$$\pi[v_1 = s, v_2, \ldots, v_n]$$

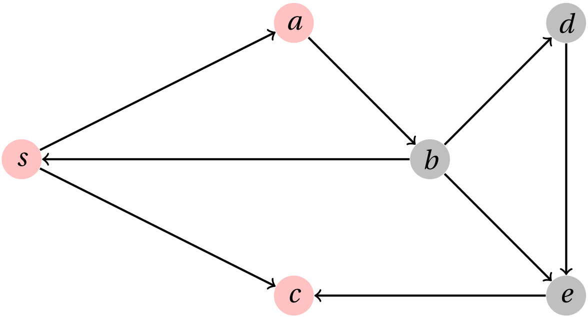
et une queue Q qui contient seulement s au début.

breadth-first-search

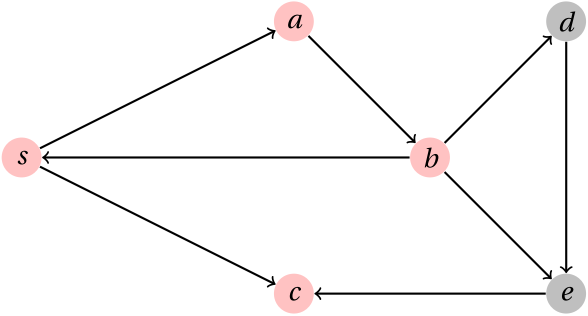
while $Q \neq \emptyset$
    $u := head(Q)$
    for each $v \in N(u)$
        if $(D[v] = \infty)$
            $\pi[v] := u$
            $D[v] := D[u] + 1$
            $enqueue(Q, v)$
    $dequeue(Q)$



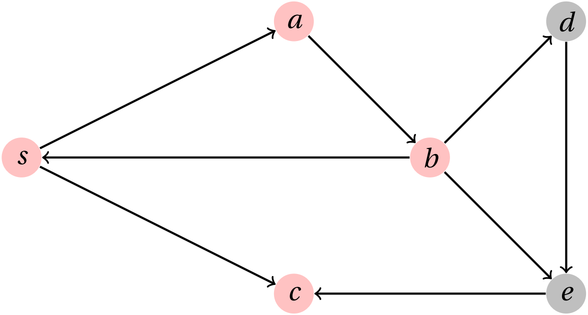
$$Q = [s]$$



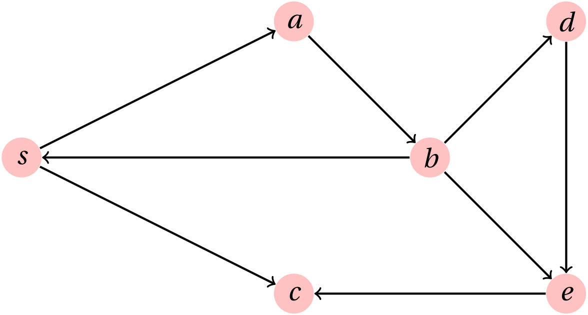
$$Q = [a, c]$$



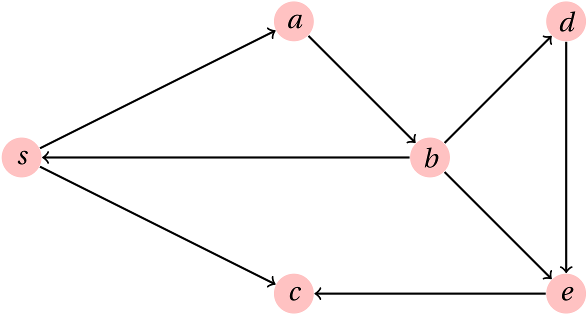
$$Q = [c, b]$$



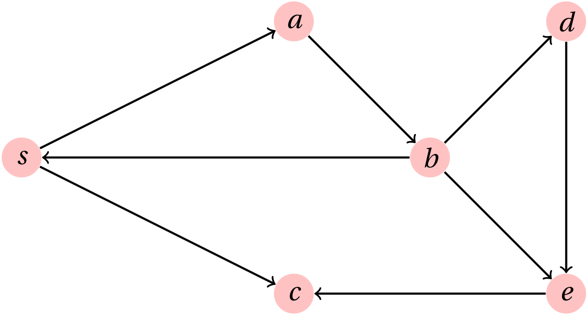
$$Q = [b]$$



$Q = [d, e]$



$$Q = [e]$$



$$Q = []$$

Définition 4.39 (Arbre)

Un arbre orienté est un graphe orienté $T = (V, A)$ avec $|A| = |V| - 1$ et dans lequel il y a un sommet $r \in T$ tel qu'il existe un chemin de r à tous les autres sommets de T.

Lemme 4.40

Considérons les tableaux D et π quand l'algorithme de parcours en largeur a terminé. Le graphe $T = (V', A')$ où $V' = \{v \in V : D[v] < \infty\}$ et $A' = \{\pi(v)v : 1 \leqslant D[v] < \infty\}$ est un arbre.

Définition 4.41

L'arbre T mentionné ci-dessus est l'arbre des plus courts chemins du graphe orienté (non-pondéré) $G = (V, A)$.

Théorème 4.42

L'algorithme de parcours en largeur se déroule en temps $O(|V| + |A|)$.

Définition 4.43

Une marche pour laquelle le sommet de départ et celui d'arrivée coïncident est appelée cycle.

Définition 4.44

Soit un graphe orienté $D = (V, A)$ ainsi qu'une fonction de longueur $c\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$. La longueur d'une marche W est définie comme

$$c(W) = \sum_{\substack{a \in A \\ a \in W}} c(a).$$

Théorème 4.45

Supposons que tout cycle dans D est de longueur non-négative et supposons qu'il existe une marche de s à t dans D. Alors il existe un chemin reliant s à t qui est de longueur minimale parmi toutes les marches reliant s et t.

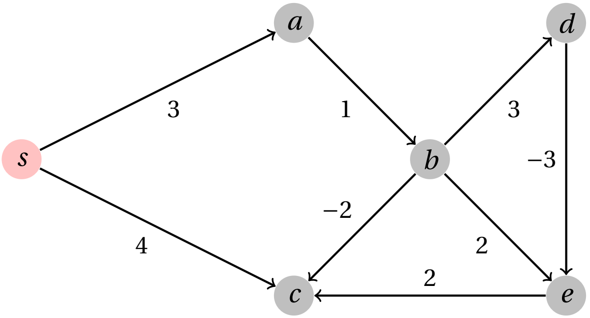
Algorithme de Bellmann-Ford

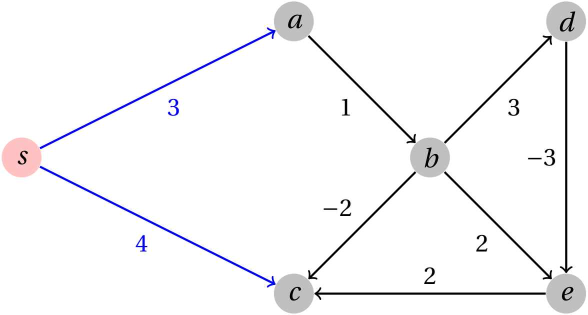
i) $f_0(s) = 0$, $f_0(v) = \infty$ pour tout $v \neq s$

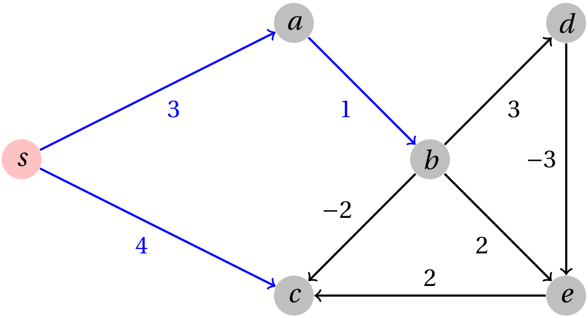
ii) Pour $k < n$ si f_k a été trouvé, calculer

$$f_{k+1}(v) = \min\{f_k(v), \min_{(u,v)\in A}\{f_k(u) + c(u,v)\}$$

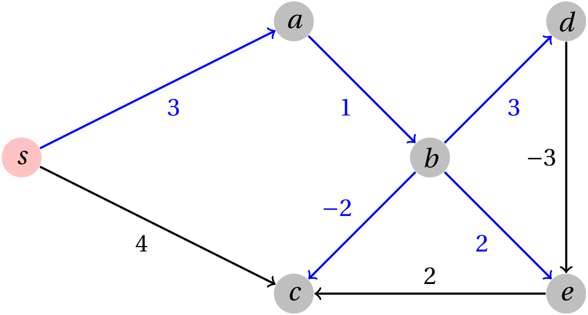
pour tout $v \in V$.

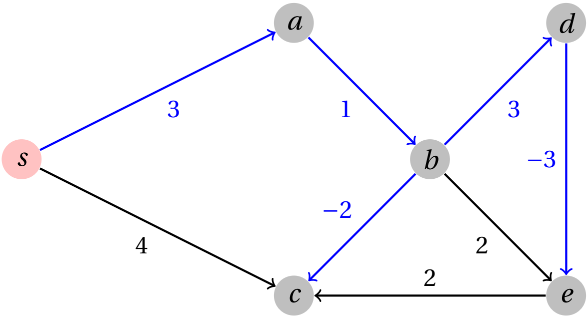

a
d
3
1
3
s
b
−3
−2
4
2
2
c
e

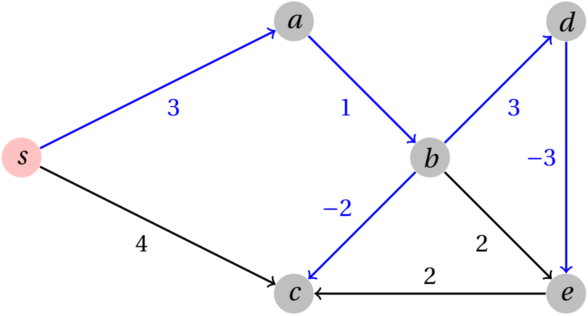

a
d
3
1
3
s
b
−3
−2
2
4
2
c
e



a
s
b
d
c
e
3
1
3
−3
4
−2
2
2


a
d
3
1
3
s
b
−3
−2
4
2
2
c
e


a
d
3
1
3
s
b
−3
−2
4
2
2
c
e


a
d
s
b
c
e
3
1
3
−3
−2
4
2
2

Objectifs

- Notation O, Ω, Θ
- Graphes orientés et leurs représentations
- Chemins plus courts (breadth-first-search)
- Chemin plus courts (Bellmann-Ford)

Objectifs

- Notation O, Ω, Θ ✔
- Graphes orientés et leurs représentations ✔
- Chemins plus courts (breadth-first-search) ✔
- Chemin plus courts (Bellmann-Ford) ✔