Objectifs

- Programmation linéaire en nombres entiers
- Couplages
- Polyèdres entiers
- Couplages dans les graphes bipartis
- Problème de couverture de sommets dans les graphes bipartis

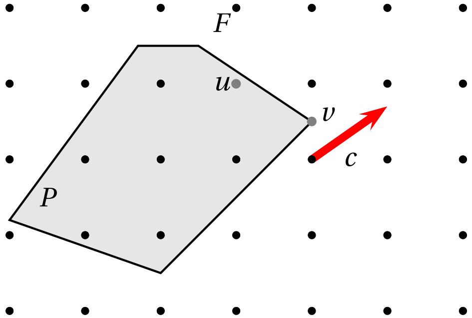
Programmation linéaire en nombres entiers

PLNE

Un programme linéaire en nombres entiers est un problème de la forme suivante

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &Ax \leqslant b \\ &x \in \mathbb{Z}^n, \end{aligned} \tag{30}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$



Définition 4.19 (Relaxation linéaire)

Le PL

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &Ax \leqslant b \\ &x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{31}$$

est la relaxation linéaire du PLNE (30).

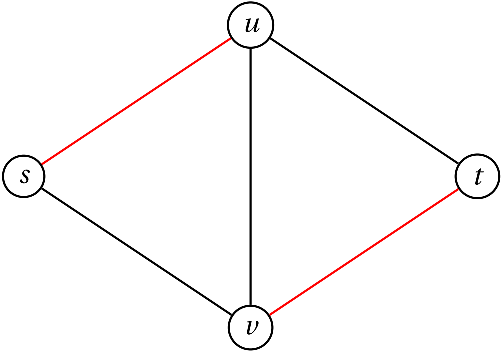
Lemme 4.20

Si x^* est une solution optimale de la relaxation linéaire et si on a de plus $x^* \in \mathbb{Z}^n$, alors x^* est une solution optimale du PLNE.

Graphes et couplages

Définition 4.21

Un graphe est un couple $G = (V, E)$ où V est un ensemble fini (les sommets ou nœds) et $E \subseteq \binom{V}{2}$ est l'ensemble des arêtes. Un couplage de G est un ensemble $M \subseteq E$ tel que pour $e_1, e_2 \in M$ avec $e_1 \neq e_2$ on a $e_1 \cap e_2 = \emptyset$.



Définition 4.22 (Arêtes adjacentes (ou incidentes) à un sommet)

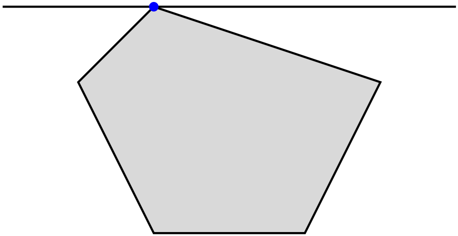
Pour un sommet $v \in V$, l'ensemble $\delta(v) = \{e \in E\colon\ v \in e\}$ représente l'ensemble des arêtes adjacentes (ou incidentes) au sommet v.

Utilisant cette définition, le probléme du couplage à poid maximum peut s'écrire comme suit sous forme d'un PLNE.

$$\begin{gathered} \max \textstyle\sum_{e \in E} w(e)x(e) \\ v \in V : \textstyle\sum_{e \in \delta(v)} x(e) \leqslant 1 \\ e \in E : x(e) \geqslant 0 \\ x \in \mathbb{Z}^{|E|}. \end{gathered} \tag{32}$$

Définition 4.23 (Inégalité valide, face, sommet)

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b\}$ un polyèdre. Une inégalité $c^T x \leqslant \beta$ est appelé valide pour P si $c^T x^* \leqslant \beta$ pour tout $x^* \in P$. Une face de P est un ensemble de la forme $P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \beta\}$ pour une inégalité valide $c^T x \leqslant \beta$ de P. Si une face consiste d'un seul point, alors on dit qu'elle est un sommet de P.



Définition 4.24

Un polyèdre rationel est appelé intégral si chaque face non-vide de P contient un vecteur intègral.

Lemme 4.25

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leqslant b\}$ *un polyèdre intégral où* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *une matrice de rang-colonne plein. Si le programme linéaire*

$$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n, Ax \leqslant b\} \tag{33}$$

est admissible et borné, alors la méthode du simplexe rend une solution optimale intégrale du programme linéaire (33).

Lemme 4.26

Soit $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ *une matrice intégrale est inversible. Alors* $A^{-1}b \in \mathbb{Z}^n$ *pour tout* $b \in \mathbb{Z}^n$ *si et seulement si* $\det(A) = \pm 1$.

Définition 4.27

Une matrice intégrale $A \in \{0, \pm 1\}^{m\times n}$ est appelé totalement unimodulaire si tout sous-matrice carré de A a un déterminant $0, \pm 1$.

Théorème 4.28 (Hoffman-Kruskal Theorem)

Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ *une matrice intégrale. Alors le polyèdre* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$ *est intégrale pour tout* $b \in \mathbb{Z}^m$ *si et seulement si A est totalement unimodulaire.*

Définition 4.29

Un graphe $G = (V, E)$ est biparti, si l'ensemble des sommets V peut être partitionné en deux ensembles A et B tel que chaque arête $\{u, v\} \in E$ a une éxtremité en A et l'autre dans B.

Définition 4.30

La matrice d'incidence sommets-arêtes d'un graphe $G = (V, E)$ est la matrice $A \in \{0,1\}^{|V| \times |E|}$ défini par

$$A(v, e) = \begin{cases} 1, & \text{if } v \in e, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Lemme 4.31

Si G est un graphe biparti, alors la matrice d'incidence qui correspond à G est totalement unimodulaire.

Définition 4.32

Une couverture de sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $C \subseteq V$ des sommets tel que $e \cap C \neq \emptyset$ pour tout $e \in E$.

$$\begin{gathered} \min \textstyle\sum_{v \in V} w(v)x(v) \\ uv \in E : x(u) + x(v) \geqslant 1 \\ v \in V : x(v) \geqslant 0 \\ x \in \mathbb{Z}^V. \end{gathered} \tag{34}$$

Clairement, ce PLNE peut se réécrire comme suit.

$$\min\{w^T x \colon A^T x \geqslant 1, x \geqslant 0, x \in \mathbb{Z}^V\}, \tag{35}$$

où A est la matrice d'incidence sommets-arêtes de G.

Théorème 4.33 (König's theorem)

Pour tout graphe biparti, le nombres d'arêtes dans un couplage maximum est égal au nombre de sommets dans une couverture de sommets minimum.

Objectifs

- Programmation linéaire en nombres entiers
- Couplages
- Polyèdres entiers
- Couplages dans les graphes bipartis
- Problème de couverture de sommets dans les graphes bipartis

Objectifs

- Programmation linéaire en nombres entiers ✔
- Couplages ✔
- Polyèdres entiers ✔
- Couplages dans les graphes bipartis ✔
- Problème de couverture de sommets dans les graphes bipartis ✔