Objectifs

- Récapitulation : Itération de l'algorithme du simplexe
- Exemple
- Simplexe est correcte
- Réduire le cas dégénéré au cas non dégénéré
- Dualité forte

Implémenter pas iii)

- On considère les systèmes d'équations

$$\begin{aligned} \Sigma_{k\in B} a_k x_k + a_i x_i &= c && (20) \\ \Sigma_{k\in B} a_k y_k + a_i y_i &= 0 && (21) \end{aligned}$$

avec variables x_k, $k \in B$, x_i et y_k, $k \in B$, y_i.
- Calcule la solution $x^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ de (20) tel que $x_i^* = 0$ et une solution $y^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ de (21) tel que $y_i^* = 1$
- Calcule $J = \{k \in B \colon\ y_k^* < 0\}$

$$\lambda^* = \min_{k\in J} -\frac{x^*(k)}{y^*(k)}. \tag{22}$$

On choisit $j \in J$ tel que le minimum est atteint.
- j sort du toit

Lemme 4.9

L'ensemble des indexes $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$ est un toit et $x^*_{B'}$ est admissible pour le PL defini par B.

Asserter l'inadmissibilité

Si $J = \emptyset$, le PL est inadmissible.

Proposition

Les demi-espaces $a_k^T x \leqslant b(k)$, $k \in B$ et $a_i^T x \leqslant b(i)$ définissent un système d'inégalités inadmissible si et seulement si $J = \emptyset$.

Objectifs

- Récapitulation : Itération de l'algorithme du simplexe ✔
- Exemple ✔
- Simplexe est correcte ✔
- Réduire le cas dégénéré au cas non dégénéré
- L'hypothèse du rang plein
- Dualité forte

Le cas dégénéré

Soit

$$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n, Ax \leqslant b\} \tag{23}$$

un PL avec toits.

Lemme 4.10

Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

1. *Le PL*

   $$\max\{c_\varepsilon^T x \colon x \in \mathbb{R}^n, Ax \leqslant b\} \tag{24}$$

   a un toit.
2. *Si $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ n'est pas un toit du PL*(23)*, alors B n'est pas non plus un toit du PL* (24)*.*
3. *Aucun toit de* (24) *est dégénéré.*

L'hypothèse du rang plein

On a supposé

Les colonnes de la matrice $A \in \mathbb{R}$ sont linéairement indépendantes.

Maintenant

$$A = [A_1 \mid A_2]$$

tel que chaque colonne de A_2 est combinaison linéaire des colonnes de A_1. On décompose $c^T = [c_1^T \mid c_2^T]$ et considère le PL

$$\max\{c_1^T x_1 : x_1 \in \mathbb{R}^k, A_1 x_1 \leqslant b\} \tag{25}$$

Lemme 4.11

PL (25) *est admissible si et seulement si PL* (11) *est admissible.*

Lemme 4.12

Si (25) *est admissible et* $c_2^T \neq c_1^T \cdot U$, *alors* (11) *n'est pas borné.*

Conséquence

Si $c_2^T = c_1^T \cdot U$, on résoudre PL (25). La solution optimale est solution optimale du PL (11).

Le PL dual

PL dual

Le PL

$$\min\{b^T y \colon y \in \mathbb{R}^m, A^T y = c, y \geqslant 0\} \tag{26}$$

est le PL dual du PL (11).

Théorème 4.13 (Dualité forte)

Si le PL (11) *est admissible et borné, alors aussi le PL* (26) *est admissible et borné. De plus, les deux PL ont des solutions optimales et les valeur objectives correspondantes sont identiques.*

Objectifs

- Récapitulation : Itération de l'algorithme du simplexe
- Exemple
- Simplexe est correcte
- Réduire le cas dégénéré au cas non dégénéré
- L'hypothèse du rang plein
- Dualité forte

Objectifs

- Récapitulation : Itération de l'algorithme du simplexe ✔
- Exemple ✔
- Simplexe est correcte ✔
- Réduire le cas dégénéré au cas non dégénéré ✔
- L'hypothèse du rang plein ✔
- Dualité forte ✔