SECTION 4
LA MÉTHODE DU SIMPLEXE

Objectifs

- Les toits
- Dualité faible
- Caractérisation des toits
- Une itération de l'algorithme du simplexe

Notre tâche est de trouver une solution optimale du programme linéaire

$$\max\{c^T x\colon Ax \leqslant b\} \tag{11}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$.

On va supposer :

La matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est de plein rang-colonne. C.-à.-d. les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Nous allons voir postérieurement qu'on peut supposer que A est du plein rang-colonne sans perte de généralité.

Les Toits

Definition 4.1

Soit $B \subseteq \{1,\ldots,m\}$ un sous-ensemble des indexes des lignes de A. B est un toit si

i) $|B| = n$,

ii) les lignes a_i, $i \in B$ sont linéairement indépendantes, et

iii) le programme linéaire

$$\max\{c^T x \colon a_i^T x \leqslant b(i),\ i \in B\} \tag{12}$$

est borné.

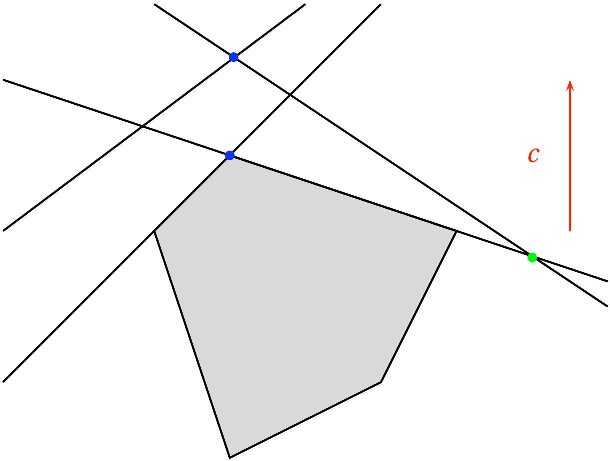


FIG.: Les points bleus marquent des toits et le point vert marque un ensemble qui satisfait i) et ii) mais pas iii), alors ce n'est pas un toit.

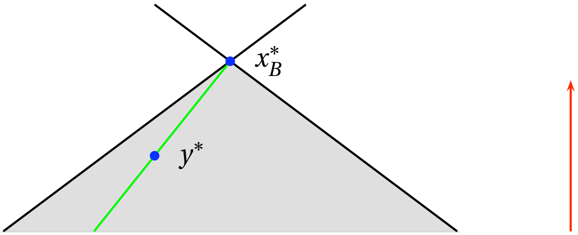
Quelle est la solution optimale d'un PL défini par un toit ?

Lemma 4.2

Soit $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ *un toit du PL* (11) *et soit* x_B^* *la solution unique du système*

$$a_i^T x = b(i),\ i \in B,$$

alors x_B^* *est une solution optimale du PL-toit* (12).



Definition 4.3

La valeur d'un toit B est la valeur optimale $c^T x_B^*$ du toit-PL

$$\max\{c^T x\colon\ a_i^T x \leqslant b(i),\ i \in B\}.$$

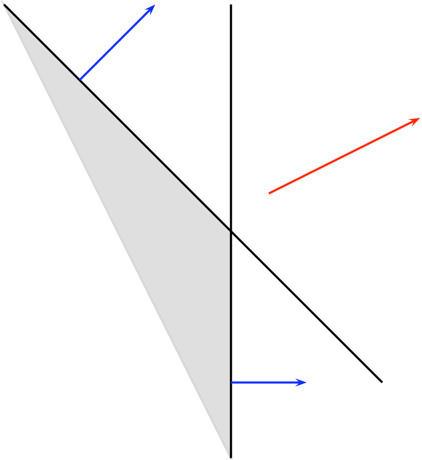
Theorem 4.4 (Dualité faible)

La valeur d'un toit est une borne supérieure des valeurs de la fonction objective sur les tous les points admissibles.

Caractérisation des toits

Lemma 4.5

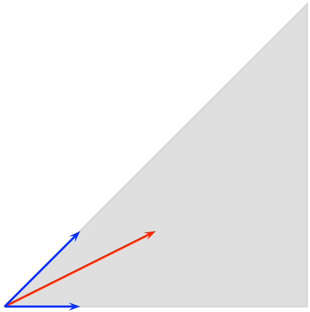
Soit $B \subseteq \{1,\ldots,m\}$ *un ensemble d'indexes qui satisfait i) et ii), alors* B *est un toit si et seulement si* $c \in \operatorname{cone}\{a_i \colon i \in B\}$.



Caractérisation des toits

Lemma 4.5

Soit $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ un ensemble d'indexes qui satisfait i) et ii), alors B est un toit si et seulement si $c \in \mathrm{cone}\{a_i \colon i \in B\}$.



Definition 4.6

Soi B un toit du PL (11).La solution unique du système

$$a_i^T x = b(i),\ i \in B, \tag{13}$$

est le nœud du toit.

Proposition

Soi B un toit du PL (11). Le nœd de B est l'unique solution optimale du PL-toit (12) si et seulement si c est une combinaison conique avec des facteurs strictement positive des vecteurs a_k, $k \in B$.

Algorithme simplexe

Brouillon d'algorithme

i) Calcule le nœd x_B^* du toit B

ii) Trouve un index $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus B$ tel que $a_i^T x_B^* > b(i)$. Si tel indexe n'existe pas, x_B^* est la solution optimale.

iii) Détermine index $j \in B$ tel que

   a) $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$ est un toit

   b) Nœud $x_{B'}^*$ de B' est admissible pour le PL défini par B.

   Si un tel indexe n'existe pas le PL (11) est inadmissible.

Terminaison et dégénération

Definition 4.7 (Toit et PL dégéneré)

Un toit B du PL (11) est dégéneré si la solution optimale du PL (12) n'est pas unique. Un PL est dégéneré si le PL a un toit dégéneré.

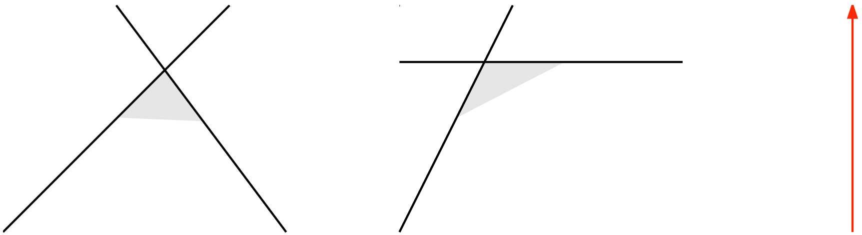


FIG.: Toit non-dégéneré et toit dégéneré

Le cas non-dégéneré

Theorem 4.8

L'algorithme simplexe termine si le PL (11) *est non-degenere.*

Implementer pas iii)

- On considère les systemes d'equations

$$\sum_{k\in B} a_k x_k + a_i x_i = c \tag{14}$$

$$\sum_{k\in B} a_k y_k + a_i y_i = 0 \tag{15}$$

avec variables x_k, $k \in B$, x_i et y_k, $k \in B$, y_i.

- Calcule la solution $x^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ de (14) tel que $x_i^* = 0$ et une solution $y^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ de (15) tel que $y_i^* = 1$
- Calcule $J = \{k \in B\colon\ y_k^* < 0\}$

$$\lambda^* = \min_{k\in J} -\frac{x^*(k)}{y^*(k)}. \tag{16}$$

On choisit $j \in J$ tel que le minimum est atteint.

- j sort du toit

Lemma 4.9

L'ensemble des indexes $B' = B \backslash \{i\} \cup \{j\}$ *est un toit et* $x^*_{B'}$ *est admissible pour le PL defini par B.*

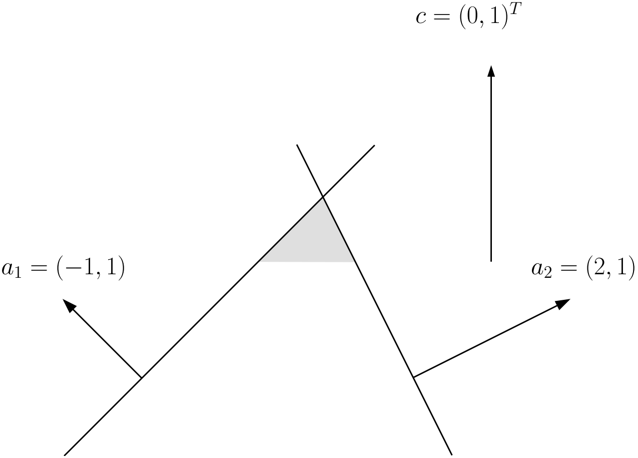


FIG.: La form “v” initiale de l’exemple **??**.

Example

On considère $\max\{x_2 : x \in \mathbb{R}^n, (-1,1)x \leqslant 1, (2,1)x \leqslant 1, (1,2)x \leqslant 1\}$.
Le toit initial est $B = \{1,2\}$ (Figure 10).
x_B^* est la solution de

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

alors $x_B^* = \binom{0}{1}$.
La contrainte $(1,2)x \leqslant 1$ coupe $x_B^* = \binom{0}{1}$. Alors 3 va entrer dans le toit B'.
On considère

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

et on trouve

$$x^* = \left(\begin{smallmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right).$$

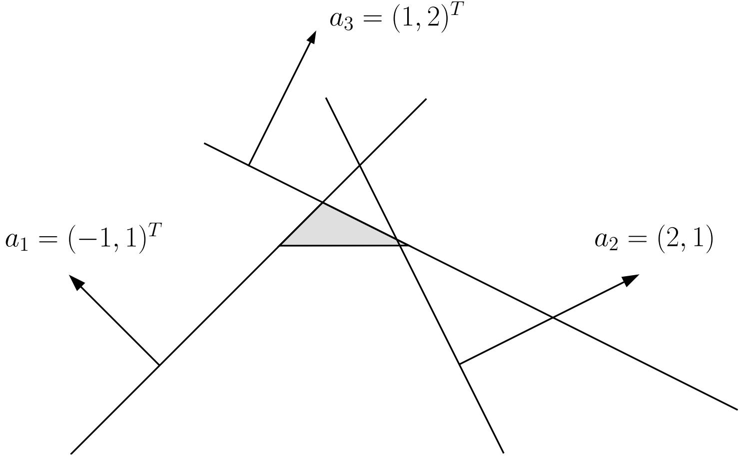
On considère

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

et on trouve

$$y^* = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right).$$

$J = \{1, 2\}$ et le minimum dans (16) est atteint par $j = 2$. Alors $B' = \{1, 3\}$.


$a_3 = (1, 2)^T$
$a_1 = (-1, 1)^T$
$a_2 = (2, 1)$

Asserter l'inadmissibilité

Si $J = \emptyset$ le PL est inadmissible.

Proposition

Les demi-espaces $a_k^T x \leqslant b(k)$, $k \in B$ et $a_i^T x \leqslant b(i)$ définissent un système d'inégalités inadmissible si et seulement si $J = \emptyset$.

Objectifs

- Les toits
- Dualité faible
- Caractérisation des toits
- Une itération de l'algorithme du simplexe

Objectifs

- Les toits ✔
- Dualité faible ✔
- Caractérisation des toits ✔
- Une itération de l'algorithme du simplexe ✔