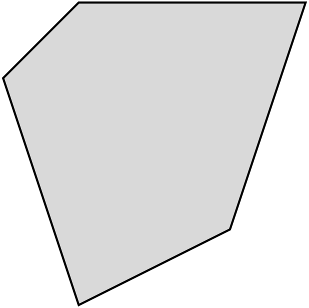
Section 3
Enveloppes linéaires, affines, coniques et convexes

Motivation

- L'ensemble de solutions admissibles d'un programme linéaire $\max\{c^T x \colon Ax \leqslant b\}$ est un ensemble convexe
- Des tels ensembles convexes de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leqslant b\}$ sont appelés polyèdres
- Il faut alors s'accommoder à quelques terminologies et concepts des ensembles convexes



Objectifs

- Définition d'enveloppe affine, linéaire, conique et convexe
- Définition d' un ensemble convexe
- Quelques théorèmes et démonstrations
- Le théorème de Charathéodory (pivoter)

L'enveloppe linéaire, affine, conique et convexe

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble de vecteurs de dimension n. L'enveloppe linéaire, l'enveloppe affine, l'enveloppe conique et l'enveloppe convexe de X sont définies comme suit.

$$
\begin{aligned}
\text{lin.hull}(X) &= \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_t x_t \colon t \geqslant 1, && (6)\\
&\quad x_1, \ldots, x_t \in X, \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}\} && (7)\\
\text{affine.hull}(X) &= \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_t x_t \colon t \geqslant 1, && (8)\\
&\quad x_1, \ldots, x_t \in X, \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}\}\\
\text{cone}(X) &= \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_t x_t \colon t \geqslant 1, && (9)\\
&\quad x_1, \ldots, x_t \in X, \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\}\\
\text{conv}(X) &= \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_t x_t \colon t \geqslant 1, && (10)\\
&\quad x_1, \ldots, x_t \in X, \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\}
\end{aligned}
$$

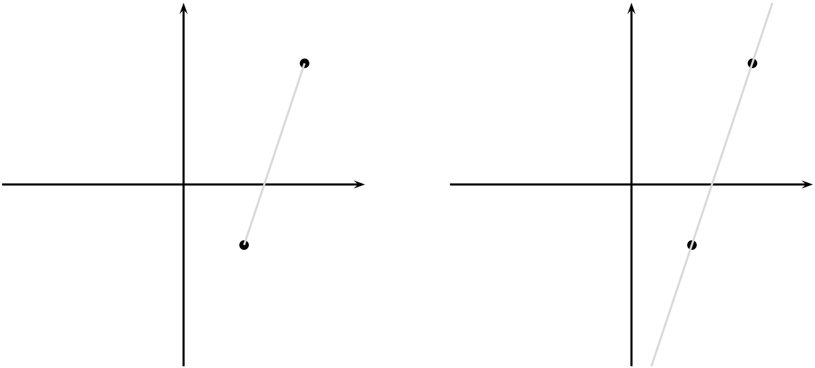


FIG.: Deux points avec leur enveloppe convexe (à gauche) et leur enveloppe affine (à droite).

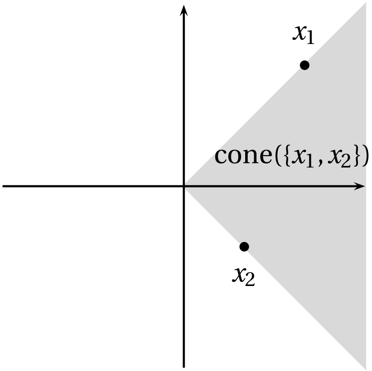


FIG.: Deux points avec leur enveloppe conique.

Proposition

Soit : $X \subseteq \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in X$. Alors

$$\operatorname{affine.hull}(X) = x_0 + \operatorname{lin.hull}(X - x_0),$$

où $u + V$ dénote l'ensemble $u + V = \{u + v \colon v \in V\}$ pour $u \in \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Répétition

Comment démontrer que $A = B$ pour deux ensembles A et B ?

En partage la démonstration en deux :

- $A \subseteq B$: C.-à.-d. : Chaque élément qui appartient à A appartient aussi à B
- $B \subseteq A$: C.-à.-d : Chaque élément qui appartient à B appartient aussi à A

Definition 3.1

L'enveloppe convexe de deux points différents $u \neq v \in \mathbb{R}^n$ est appelée segment et est dénotée par $\overline{uv}$.

Definition 3.2

Un ensemble $K \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe si pour tout $u \neq v$ le segment $\overline{uv}$ est contenu dans K, $\overline{uv} \subseteq K$.

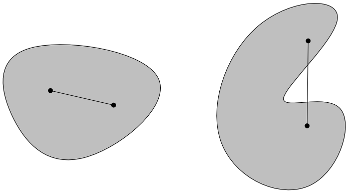


FIG.: L'ensemble à gauche est convexe, celui à droite est non-convexe.

Autrement dit, un ensemble $K \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe si pour tout $u, v \in K$ et $\lambda \in [0, 1]$ le point $\lambda u + (1 - \lambda) v$ est aussi contenu dans K.

Theorem 3.3

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble de points. L'enveloppe convexe $\operatorname{conv}(X)$ *de X est convexe.*

Theorem 3.4

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble de points. Tout ensemble convexe K qui contient X contient aussi $\operatorname{conv}(X)$.

Théorème 3.4 implique que $\operatorname{conv}(X)$ correspond à l'intersection de tous les ensembles convexes contenant X, i.e.

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcap_{\substack{K \supseteq X \\ K \text{ convex}}} K.$$

Theorem 3.5 (Théorème de Carathéodory)

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$*, alors pour tout* $x \in \operatorname{cone}(X)$ *il existe un ensemble* $\widetilde{X} \subseteq X$ *de cardinalité au plus* n *tel que* $x \in \operatorname{cone}(\widetilde{X})$*. Les vecteurs dans* $\widetilde{X}$ *sont linéairement indépendants.*

Corollary 3.6 (Théorème de Carathéodory pour les enveloppes convexes)

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$*, alors pour tout* $x \in \operatorname{conv}(X)$ *il existe un ensemble* $\widetilde{X} \subseteq X$ *de cardinalité au plus* $n+1$ *tel que* $x \in \operatorname{cone}(\widetilde{X})$*.*

Objectifs

- Définition d'enveloppe affine, linéaire, conique et convexe
- Définition d' un ensemble convexe
- Quelques théorèmes et démonstrations
- Le théorème de Charathéodory (pivoter)

Objectifs

- Définition d'enveloppe affine, linéaire, conique et convexe ✔
- Définition d' un ensemble convexe ✔
- Quelques théorèmes et démonstrations ✔
- Le théorème de Charathéodory (pivoter) ✔