Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 8 — 14 avril 2011

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites à l'exercice noté avant (le début de) la séance de la semaine prochaine.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1 (Δ)

Soit $M \in \{-1, 0, 1\}^{n \times m}$ totalement unimodulaire (TUM). Démontrer que les matrices suivantes sont aussi TUM.

(i) M^T

(ii) $(M \quad I_n)$

(iii) $(M \quad -M)$

(iv) $M \cdot (I_n - 2e_j e_j^T)$ pour un $j \in \{1, \ldots, n\}$,

où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$ et e_j est le $j^{\text{ième}}$ vecteur unitaire.

Exercice 2

Lesquelles de ces matrices sont TUM ? Justifier votre réponse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 ($*$)

Une matrice d'intervalle est une matrice avec des composantes 0 ou 1 telle que les composantes qui valent 1 sont consécutives **en lignes** (voir la deuxième matrice de l'exercice 2 pour un exemple). Donner une preuve que toutes les matrices d'intervalle sont TUM.

Indications :
- Utiliser l'exercice 1.
- Certaines opérations élémentaires préservent la propriété d'être **unimodulaire** : échanger des lignes, ajouter une ligne á une autre, soustraire une ligne d'une autre
- Une matrice telle que chaque colonne contient une composante 1 et une composante -1 au plus et les autres sont nulles, est totalement unimodulaire (la matrice d'incidence d'un graphe orienté, à voir plus tard dans le cours).

Exercice 4

Une famille de sous-ensembles $\mathcal{F}$ d'un ensemble de référence fini E est *laminaire*, si pour tous les $C, D \in \mathcal{F}$, on trouve une de ces possibilités :

$$(i)\ C \cap D = \emptyset, \quad (ii)\ C \subseteq D, \quad (iii)\ D \subseteq C.$$

Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles laminaires du même ensemble de référence E. Nous considérons leur union $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.
On définit la matrice d'adjacence A de $|\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2| \times |E|$ par :
Pour $F \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ et $e \in E$, on a $A_{F,e} = 1$, si $e \in F$ et $A_{F,e} = 0$ sinon.

Montrer que A est totalement unimodulaire.