Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 6 **31 mars 2011**

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites à l'exercice noté avant (le début de) la séance de la semaine prochaine. Les mathématiciens doivent traiter l'exercice (*). Les autres par contre peuvent choisir entre l'exercice (*) ou (Δ).
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1
Trouver la forme duale des programmes linéaires suivants :

(i)

$$\begin{array}{rrcl} \max & 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 & & \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 4 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 8 \\ & x_1 - x_3 & \geq & -15 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rrcr} \min & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 & & \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \leq & 3 \\ & x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \geq & -5 \\ & 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & & \\ & x_4 \leq 0 & & \end{array}$$

Exercice 2
Soit PL un programme linéaire admissible et borné. Donner une preuve ou un contre-exemple

(i) pour chaque entrée du tableau suivant

$\Longrightarrow$	$\exists!$ toit optimal	$\exists!$ solution optimale
PL est dégénéré	*	*
PL est non-dégénéré	*	*

(ii) pour l'affirmation :
Il est impossible qu'un programme linéaire admette une infinité de solutions optimales sous la forme primale et duale.

Exercice 3 (∗)

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$ un vecteur.

Démontrer que le polyèdre $P := \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ est vide si et seulement s'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\lambda^T A = 0$ et $\lambda^T b = -1$.

Indications :
– Considérer d'abord le cas où A est de plein rang-colonne et ensuite le cas général.
– Utiliser dualité.

Exercice 4 (Δ)

Considérer le programme linéaire suivant

$$\begin{array}{lrcr}
\max & \multicolumn{3}{l}{10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 18x_5 + 20x_6 + 15x_7 + 17x_8 + 15x_9 + 16x_{10} + 13x_{11} + 17x_{12}} \\
 & 5x_1 + 6x_5 + 13x_9 & \leq & 2100 \\
 & 7x_2 + 12x_6 + 14x_{10} & \leq & 2100 \\
 & 4x_3 + 8x_7 + 9x_{11} & \leq & 2100 \\
 & 10x_4 + 15x_8 + 17x_{12} & \leq & 2100 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \geq & 100 \\
 & x_5 + x_6 + x_7 + x_8 & \geq & 150 \\
 & x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} & \geq & 100 \\
 & x_1, \ldots, x_{12} & \geq & 0
\end{array}$$

Donner sa forme duale et trouver une solution optimale (SAGE !). Certifier l'optimalité de la solution obtenue en donnant une solution duale qui est admissible et atteint la valeur optimale.