Algèbre linéaire avancée II
printemps 2016

Série 14

Exercice 1. *Donner la forme normale de Jordan J pour la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

En plus trouver une matrice de passage Q telle que $J = Q^{-1}AQ$.

Exercice 2. *Soit $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ une matrice avec polynôme caractéristique*

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda + 7)^2$$

et polynôme minimale

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 7).$$

Déterminer la forme normale Jordan de A.

Exercice 3. *Soit $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ une matrice avec polynôme caractéristique*

$$p_A(\lambda) = (\lambda + 2)^4(\lambda - 1)^2.$$

Combien y a-t-il de formes normales de Jordan pour A ?

Exercice 4. *Soit A une matrice $\mathbb{C}^{n\times n}$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Utiliser la forme normale de Jordan pour montrer que $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k$ sont les valuers propres de A^k pour tous $k \geq 0$.*

Exercice 5. *Soit A une matrice $\in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que A et A^T sont semblables.*

Exercice 6. *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice tel que $A^3 = A$. Montrer que A est diagonalisable.*

Exercice 7. *Soit A une matrice $n \times n$ sur $\mathbb{F}_p$ où chaque entrée de A est 1. Déterminer la forme normale Jordan pour le cas où n est divisible par p et pour le cas où n n'est pas divisible par p.*

Exercice 8. *Vrai où faux :*

(a) Si J est le forme normale de Jordan pour une matrice A, J^2 est le forme normale de Jordan pour A^2.

(b) Si A et B sont deux matrices $\in \mathbb{R}^{n\times n}$, les matrices AB et BA ont le mêmes formes normale de Jordan.
