Algèbre linéaire avancée II
printemps 2017

Série 14

⋆ Cette semaine, sucun exercise n'est à rendre.

Exercice 1. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice, et soient $P, J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que P est inversible, J est en forme normale de Jordan et $A = P^{-1}JP$. Montrer que les polynômes minimaux de A et de J sont les mêmes.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice en forme normale de Jordan, où

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix},$$

et pour $i = 1, \dots, k$,

$$A_i = \begin{pmatrix} B_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{ik_i} \end{pmatrix},$$

où B_{ij} est un bloc de Jordan de taille m_{ij}, avec la valeur λ_i sur sa diagonale.

(i) Montrer que

$$m_{A_i}(x) = (\lambda_i - x)^{m_i},$$

où $m_i = \max_{j=1,\dots,k_i} m_{ij}$ est la taille maximale d'un bloc de Jordan de A avec λ_i sur la diagonale.

(ii) Montrer que

$$m_A(x) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - x)^{m_i}.$$

(iii) Quelles informations sur la forme normale de Jordan pour A nous donnent le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A?

Exercice 3. Soit $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ une matrice avec polynôme caractéristique

$$p_A(x) = (x-2)^3(x+7)^2$$

et polynôme minimal

$$m_A(x) = (x-2)^2(x+7).$$

Déterminer la forme normale Jordan J de A.

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice telle que $A^3 = A$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 5. Soit A une matrice $n \times n$ sur $\mathbb{F}_p$ où chaque coefficient de A est 1. Déterminer la forme normale de Jordan pour le cas où n est divisible par p et pour le cas où n n'est pas divisible par p.

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ un bloc Jordan avec λ sur la diagonale. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Montrer que

$$(e^{At}x)_i = \sum_{j=i}^{n} \frac{x_j t^{j-i}}{(j-i)!} e^{\lambda t}.$$

Exercice 7.

(i) Soient $x_0 \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer que le matrice

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

est inversible.

(ii) Soient $x_0 \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts, et soient $y_0, \ldots y_n \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $p \in \mathbb{C}[x]$ de degré n tel que $p(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \ldots, n$.

(iii) Montrer qu'on peut calculer le polynôme caractéristique d'une matrice complexe $n \times n$ en calculant $(n+1)$ déterminants et en résolvant un système d'équations linéaires.