Algèbre linéaire avancée II
printemps 2017

Série 12

⋆ L'exercice 4 peut être rendu le 1 juin 2017.

Exercice 1. On considère un système différentiel $\dot{x} = Ax$ et on suppose que A est une matrice nilpotente, si bien que $A^m = 0$ pour un certain entier $m > 0$. Montrer que, dans une solution $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, chaque fonction $x_i(t)$ est un polynôme en t et qu'il est de degré au plus $m - 1$.

Algorithme d'Euclide : Soient f, g des polynômes sur le corps K (dans $K[t]$, i.e. avec coefficients dans K). Si $\deg g \geq 0$ (on assume $\deg(0) = -\infty$), alors il existe deux polynômes q et r dans $K[t]$ tels que

$$f(t) = q(t)g(t) + r(t),$$

avec $\deg(r) < \deg(g)$. Les polynômes q et r sont uniquement déterminés par ces conditions.

Exercice 2. Soit K un corps tel que chaque polynôme non-constant dans $K[t]$ admet une racine dans K. Soit f un polynôme de ce type. Alors il existe des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ et $c \in K$ tels que

$$f(t) = c(t - \alpha_1) \cdots (t - \alpha_n).$$

Exercice 3. Soit f un polynôme sur $K[t]$ de degré n. Alors il y a au plus n racines de f dans K.

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, écrire $f = qg + r$, avec $\deg(r) < \deg(g)$.

(i) $f(t) = t^2 - 2t + 1$, $g(t) = t - 1$,

(ii) $f(t) = t^3 + t - 1$, $g(t) = t^2 + 1$,

(iii) $f(t) = t^3 + t$, $g(t) = t$,

(iv) $f(t) = t^3 - 1$, $g(t) = t - 1$.

Exercice 5. Soient f et g des polynômes sur $\mathbb{Z}[t]$. Si le polyôme $g(t)$ a 1 comme coefficient devant le plus haut degré (i.e., $g(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0$), montrer que quand on exprime f avec la décomposition $f = qg + r$ avec $\deg(r) < \deg(g)$, alors les polynômes q et r sont sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 6.

1. Montrer que $t^n - 1$ est divisible par $t - 1$.
2. Montrer que $t^4 + 4$ peut être factorisé comme produit de polynômes de degré 2 avec des coefficients entiers.
3. Si n est impair, trouver le quotient de $t^n + 1$ par $t + 1$.

Exercice 7. Soit $f(t) = t^n + \ldots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes, $\deg(f) = n$ et soit α une racine. Montrer que $|\alpha| \leq n \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$.
Indication: écrire $-\alpha^n = a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0$, diviser par α^n et prendre la valeur absolue.

Exercice 8. Soit $f(t)$ un polynôme avec des coefficients réels. Soit α une racine de f complexe mais pas réelle. Montrer que $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de f.

Exercice 9 (Algorithme d'Euclide étendu)**.** Soient f et g deux polynômes non-nuls sur un corps K. Alors il existe deux polynômes q et r sur $K[t]$ tels que

$$f(t)q(t) + g(t)r(t) = \gcd(f, g),$$

avec $\deg(q) < \deg(g) - \deg(\gcd(f, g))$, et $\deg(r) < \deg(f) - \deg(\gcd(f, g))$.