Algèbre linéaire avancée II
printemps 2016

Série 12

$\star$ L'exercice 7 peut être rendu le 26 mai 2016.

Exercice 1. *Une fonction* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *est* holomorphe *en* $z_0 \in \mathbb{C}$ *si*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Soit f *holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *et* $g = f_{|\mathbb{R}}$ *la fonction* f *réduite à* $\mathbb{R}$*. Montrer*

i) $g(x) = g_{\Re}(x) + i \cdot g_{\Im}(x)$ *est dérivable au sens de notre définition, particulièrement* $g_{\Re}(x)$ *et* $g_{\Im}(x)$ *sont dérivables.*

ii) $f'_{|\mathbb{R}}(x) = g'_{\Re}(x) + i \cdot g'_{\Im}(x)$.

Exercice 2. *Soit* $\{u_1 + i \cdot w_1, \ldots, u_n + i \cdot w_n\}$ *une base de* $\mathbb{C}^n$ *où* $u_i, w_i \in \mathbb{R}^n$ *pour tout* i*. Montrer que* $span\{u_1, \cdots, u_n, w_1, \cdots, w_n\} = \mathbb{R}^n$.

Exercice 3. *(a) Soit* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$*. Montrer que la norme Frobenius de* A *est*

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}$$

(b) Soit $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$*. Montrer que*

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

Exercice 4. *Soit* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$*. Montrer que* $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$.

Exercice 5. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$*. Résoudre l'equation* $X' = AX$ *avec condition initiales* $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *utilisant* e^{At}.

Exercice 6. *Soit* $A \in \mathbb{R}^n$ *une matrice telle que les valeurs propres complexes viennent en pairs conjugé complexes* $\lambda, \overline{\lambda}$*. Soit* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *une base pour de vecteurs propres associés à la valuer propre* λ*. Montrer que* $\{\overline{v_1}, \cdots, \overline{v_k}\}$ *est une base pour de vecteurs propres associés à la valeur propre* $\overline{\lambda}$.

Exercice 7. *On considère le système*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2$$

avec les conditions initiales : $x(0) = \alpha$ *et* $y(0) = \beta$.

(a) *Écrire le système en notation de vectuer matrice comme* $X' = AX$ *et* $X(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

(b) *Trouver les valuers propres* λ_1 *et* λ_2 *de la matrice* A,

(c) *Trouver la matrice* S *telle que* $\mathrm{e}^{tA} = S e^{t\Lambda} S^{-1}$ *où*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(d) *Résoudre l'equation* $X(t) = e^{tA} X(0)$ *pour trouver une solution du système orignal.*

Exercice 8. *On considère le système*

$$X' = AX + F(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

La forme normale de Jordan de la matrice A *est*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec matrice de passage S *telle que* $S^{-1}AS = J$ *donner par*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *Touver* $Y = S^{-1}X$ *et* $G(t) = S^{-1}F(t)$.

(b) *Résoudre l'equation* $Y' = JY + G(t)$ *pour trouver une solution du système orignal.*

(c) *Trouver la solution que satisfait les conditions initiales :*

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 1.$$
