Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 11 **12 mai 2011**

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites à l'exercice noté avant (le début de) la séance de la semaine prochaine.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

Supposons que vous possédez n animaux différents et deux étables. Malheureusement, quelques animaux aiment en dévorer d'autres lorsque vous n'êtes pas présent. Il s'agit donc d'assigner les animaux aux étables avec considération. Vous connaissez m relations de la forme « u dévore v », où u et v sont des animaux. Trouver un algorithme qui s'exécute en temps $\mathcal{O}(n+m)$ et qui trouve une assignation fiable des animaux aux étables, si possible, ou donne un certificat d'inadmissibilité, sinon. *Indication :* Algorithme de parcours en largeur.

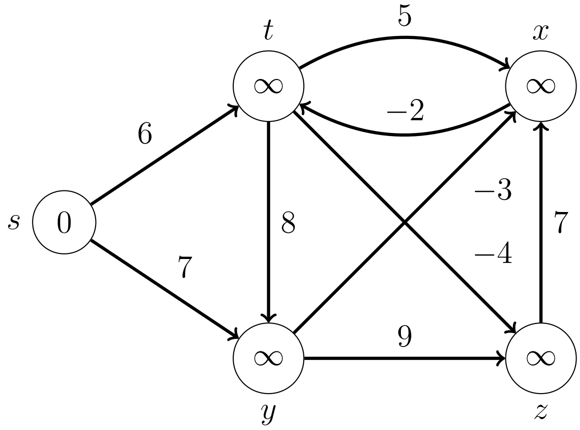
Exercice 2 $(*), (\Delta)$

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté avec des poids $c : A \to \mathbb{R}$ et un potentiel de sommets $f : V \to \mathbb{R}$. f est *admissible* si $c(a) \geq f(y) - f(x)$ pour tout arc $a = (x, y) \in A$.
Montrer qu'il existe un potentiel admissible associé à D si et seulement si D ne contient pas de cycle de poids négatif.
Utiliser la dualité !

Indication : La matrice d'incidence arcs-sommets contient une ligne pour chaque arc dont une entrée -1 pour l'origine et 1 pour son extrémité.

Exercice 3

Considérer le graphe orienté figuré ci-dessous avec des étiquettes de distance. Exécuter l'algorithme de Bellman-Ford en utilisant s comme source. Pour tout $k = 1, \ldots, 5$: dessiner le graphe en utilisant les f_k pour étiquettes de distance. Pour chaque sommet, marquer l'arc qui atteint le minimum de l'étape (ii) (s'il existe).
Les étiquettes pour $k = 0$ sont déjà notées au graphe.



Exercice 4

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté avec une fonction de distance $c : A \to \mathbb{R}$.

Considérer la modification suivante de l'algorithme de Bellman-Ford : On maintient un vecteur de *précédents* $\Pi \in V^V$, c'est-à-dire que pour $v \in V$, on dit que $\Pi(v) \in V$ est le *précédent* de v.

Initialement, on pose $\Pi(v) := \texttt{NUL}$ pour tout $v \in V$. À l'étape (ii) de l'algorithme, lors du calcul de $f_{k+1}(v) = f_k(u) + c(u, v)$ pour un $u \in V$, on pose $\Pi(v) := u$.

Montrer comment on peut utiliser cet algorithme modifié pour trouver soit un potentiel admissible soit un cycle de poids négatif.